Abteilung für Angewandte Mathematik 3.11.2010
Prof. Dr. M. Růžička, Philipp Nägele

Einführung in Theorie und Numerik partieller Differentialgleichungen

WS 2010/11 — Woche 3

Abgabe: Montag, den 8. November, vor der Vorlesung

Aufgabe 1: (Rotationsinvarianz des Laplace-Operators) 4 Punkte

Zeigen Sie: Für jede Orthonormalbasis $v_1, ..., v_d$ des $\mathbb{R}^d$ gilt

$$\Delta u = \partial_{v_1}^2 u + ... + \partial_{v_d}^2 u.$$

Bemerkung:

Wegen Aufgabe 1 gilt dann: $\Delta_y u(y) = \Delta_x u(Ax)$ für Rotationen $y = Ax$ mit einer orthogonalen Matrix A. Diese Aussage liefert die Begründung dafür, warum in der Vorlesung eine harmonische Funktion u der Form $u(x) = v(|x|)$ konstruiert wurde.

Aufgabe 2: (Harmonische Funktionen in 1-d) 4 Punkte

Sei $(a, b) \subset \mathbb{R}$ ein beschränktes Intervall und $g \in C([a, b])$. Finden Sie eine harmonische Funktion $u \in C^2(a, b) \cap C([a, b])$ zu den Randwerten $u(a) = g(a)$ und $u(b) = g(b)$. Zeigen Sie anschließend, dass Ihre Lösung Minimum und Maximum auf dem Rand von (a, b) annimmt und folgern Sie daraus die Eindeutigkeit der Lösung. Zeigen Sie außerdem, dass u die Mittelwerteigenschaft besitzt, d.h. für alle $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \subset (a, b)$ gilt

$$u(x_0) = \frac{1}{2\varepsilon} \int_{x_0-\varepsilon}^{x_0+\varepsilon} u(y)\, dy.$$

Aufgabe 3: (Regularität bis zum Rand) 7 Punkte

Es seien $0 < \alpha < 2$, $\Omega := \{\, x \in \mathbb{R}^2 \mid x = (r \cos\varphi, r \sin\varphi), 0 < \varphi < \alpha\pi, r < 1 \,\}$ und

$$u(x) := r^{\frac{1}{\alpha}} \sin \frac{\varphi}{\alpha}.$$

1. Zeigen Sie $u \in C^2(\overline{\Omega} \setminus \{0\}) \cap C(\overline{\Omega})$. Für welche α gilt $u \in C^k(\overline{\Omega})$, $k = 1, 2$?

2. Zeigen Sie $\Delta u = 0$ in Ω und $u = 0$ auf $\{\, x \in \partial\Omega \mid |x| \neq 1 \,\}$.