Abteilung für Angewandte Mathematik 15.11.2010
Prof.Dr. M. Růžička, Philipp Nägele

Einführung in Theorie und Numerik partieller Differentialgleichungen

WS 2010/11 — Woche 4

Abgabe: Montag, den 22. November, vor der Vorlesung

Aufgabe 1: (Eigenschaften von Sobolev-Funktionen) 4 Punkte

Sei $\big(W^{m,p}(G), \|\cdot\|_{W^{m,p}(G)}\big)$, $m \geq 1$ und $p \in [1, \infty]$, der in der Vorlesung definierte Sobolevraum. Zeigen Sie:

1. $|||u|||_{W^{m,p}(G)} := \sum\limits_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_{L^p(G)}$ definiert eine äquivalente Norm auf $W^{m,p}(G)$.

2. Für $u \in W^{m,p}(G)$ und alle Multiindizes α, β mit $|\alpha| + |\beta| \leq m$ gilt $D^\beta(D^\alpha u) = D^\alpha(D^\beta u) = D^{\alpha+\beta} u$.

3. Klassisch differenzierbare Funktionen sind schwach differenzierbar mit gleicher Ableitung.

4. Die Poincaré Ungleichung gilt im Allgemeinen nicht auf $W^{m,p}(G)$.

Aufgabe 2: (Beispiel für eine Sobolev-Funktion) 4 Punkte

Sei $G := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2 + y^2 < 1, x > 0, y > 0\}$ und

$$u(x, y) := \arctan \frac{y}{x}.$$

Für welche p gilt $u \in W^{1,p}(G)$?

Aufgabe 3: (stetige lineare Operatoren) 5 Punkte

Seien X, Y normierte Vektorräume und sei $T : X \to Y$ ein linearer Operator. Dann sind äquivalent:

1. T ist stetig.

2. T ist stetig in 0.

3. $\sup\limits_{\|x\|_X \leq 1} \|Tx\|_Y < \infty$.

4. Es gibt eine Konstante $C > 0$ mit $\|Tx\|_Y \leq C\, \|x\|_X$.

Aufgabe 4: (Operatornorm) **7 Punkte**

Für normierte Vektorräume X, Y definieren wir

$$L(X,Y) := \{\, T : X \to Y \mid T \text{ ist stetig und linear} \,\}.$$

Für $T \in L(X,Y)$ sei die Operatornorm definiert durch

$$\|T\|_{L(X,Y)} := \|T\| := \sup_{\|x\|_X \le 1} \|Tx\|_Y.$$

Zeigen Sie:

$$\|T\| = \sup_{\|x\|_X = 1} \|Tx\|_Y = \inf \left\{\, C > 0 \mid \|Tx\|_Y \le C\, \|x\|_X \, \forall x \in X \,\right\}.$$

Zeigen Sie außerdem, dass $(L(X,Y), \|\cdot\|_{L(X,Y)})$ ein normierter Vektorraum ist und ein Banachraum, falls Y ein Banachraum ist.