Abteilung für Angewandte Mathematik 22.11.2010
Prof.Dr. M. Růžička, Philipp Nägele

Einführung in Theorie und Numerik partieller Differentialgleichungen

WS 2010/11 — Woche 5

Abgabe: Montag, den 29. November, vor der Vorlesung

Aufgabe 1: (Produkt- und Kettenregel) 9 Punkte

1. Für $u \in W_0^{1,p}(G)$ und $v \in W_0^{1,p'}(G)$ gilt $uv \in W_0^{1,1}(G)$ und $\partial_i(uv) = \partial_i uv + u\partial_i v$ für alle $i = 1, ..., n$.
2. Sei $G \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet und sei $F \in C^1(\mathbb{R})$ mit $F(0) = 0$ und $|F'| \le K$. Dann gilt für jede Funktion $u \in W_0^{1,p}(G)$, $1 \le p < \infty$, auch $F(u) \in W_0^{1,p}(G)$ und $\partial_i F(u) = F'(u)\partial_i u$, $i = 1, ..., n$.
3. Für $u \in W_0^{1,p}(G)$, $1 \le p < \infty$, liegen auch $|u|, u_+ := \max\{u, 0\}$ und $u_- := \min\{u, 0\}$ in $W_0^{1,p}(G)$.
   Tipp: Betrachten Sie für $\varepsilon > 0$ die Funktion
   $$F_\varepsilon(u) = \begin{cases} (u^2 + \varepsilon^2)^{1/2} - \varepsilon & \text{falls}\, u > 0, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$
   und verwenden Sie die Kettenregel.

Aufgabe 2: (schwache Ableitung) 4 Punkte

Die Funktion $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei definiert durch

$$u(x) := \begin{cases} x & \text{falls } x \le 0, \\ 2 & \text{falls } x > 0. \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass u auf keinem Intervall, das die 0 enthält, eine schwache Ableitung im Sinne von Definition 1.42 aus der Vorlesung besitzt.

Aufgabe 3: (Dualraum von $L^p(G)$) 7 Punkte

Sei $1 < p < \infty$ und sei p' definiert durch $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. Wir definieren einen Operator $T : L^{p'}(G) \to (L^p(G))^*$ durch

$$\langle Tu, \varphi \rangle := \int_G u\varphi \, dx, \quad \varphi \in L^p(G).$$

Zeigen Sie: T ist wohldefiniert und es gilt $\|Tu\|_{(L^p(G))^*} = \|u\|_{L^{p'}(G)}$. Folgern Sie daraus, dass $L^{p'}(G)$ isometrisch isomorph zu einem abgeschlossenen Unterraum von $(L^p(G))^*$ ist.
Bemerkung: Die Aufgabe zeigt insbesondere, dass T injektiv ist und man kann sogar zeigen, dass T surjektiv ist. Daher ist für $1 < p < \infty$ der Dualraum von $L^p(G)$ isometrisch isomorph zu $L^{p'}(G)$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$.