Abteilung für Angewandte Mathematik 29.11.2010
Prof. Dr. M. Růžička, Philipp Nägele

Einführung in Theorie und Numerik partieller Differentialgleichungen

WS 2010/11 — Woche 6
Abgabe: Montag, den 6. Dezember, vor der Vorlesung

Aufgabe 1: (Spuroperator) 5 Punkte

Sei $G \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet mit C^1-Rand. Zeigen Sie durch ein Gegenbeispiel, dass es keine stetige lineare Abbildung $T : L^p(G) \to L^p(\partial G)$ gibt mit $Tu = u|_{\partial G}$ für $u \in C(\overline{G}) \cap L^p(G)$.

Aufgabe 2: (Regularität) 5 Punkte

Betrachten Sie auf dem beschränktem Intervall $I = (a, b) \subset \mathbb{R}$ das Randwertproblem

$$\begin{aligned} -u'' + u &= f \quad \text{in } I \\ u(a) = u(b) &= 0. \end{aligned} \tag{1}$$

1. Definieren Sie unter geeigneten Voraussetzungen an f eine schwache Formulierung von (1) auf dem Sobolevraum $H^1_0(I)$.
2. Zeigen Sie, dass eine klassische Lösung von (1) auch schwache Lösung ist.
3. Zeigen Sie, dass unter der Annahme $f \in C(\overline{I})$ jede schwache Lösung $u \in H^1_0(I)$ auch eine klassische Lösung ist.

Aufgabe 3: (schwach-subharmonische Funktionen) 5 Punkte

Sei $G \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet. Eine Funktion $u \in H^1_0(G)$ heisst schwach-subharmonisch falls für alle nichtnegativen Funktionen $\varphi \in H^1_0(G)$ gilt

$$\int_G \nabla u \cdot \nabla \varphi \, dx \leq 0.$$

Verwenden Sie Aufgabe 1 aus Woche 5 um zu zeigen, dass $u \leq 0$ f.ü. in G gilt, falls u schwach-subharmonisch ist.

Aufgabe 4: (Abschneidefunktion) 5 Punkte

Wir definieren eine Funktion $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ durch

$$u(x) := \begin{cases} e^{1/(|x|^2-1)}, & \text{für } |x| < 1, \\ 0 & \text{für } |x| \geq 1. \end{cases}$$

Zeigen Sie $u \in C^\infty_0(\mathbb{R}^n)$. Konstruieren Sie mit Hilfe von u eine Funktion $\eta \in C^\infty_0(B_R(0))$, $0 \leq \eta \leq 1$, $\eta \equiv 1$ auf $B_{R/2}(0)$.
Tipp: Glätten Sie eine geeignete charakteristische Funktion.