Abteilung für Angewandte Mathematik 6.12.2010
Prof. Dr. M. Růžička, Philipp Nägele

Einführung in Theorie und Numerik partieller Differentialgleichungen

WS 2010/11 — Woche 7
Abgabe: Montag, den 13. Dezember, vor der Vorlesung

Aufgabe 1: 8 Punkte

Sei $G \subset \mathbb{R}^d$ ein offenes beschränktes Gebiet.

1. Sei $u \in L^\infty(G)$ und $\Phi(u;p) := \left(\frac{1}{|G|}\int_G |u|^p\right)^{1/p}$. Zeigen Sie: $\Phi(u;p)$ ist monoton wachsend in p und es gilt $\Phi(u;p) \to \|u\|_{L^\infty(G)}$ für $p \to \infty$.
2. Falls $u \in \bigcap_{1\le p<\infty} L^p(G)$ und $\sup_{1\le p<\infty} \|u\|_{L^p(G)} < \infty$ gilt, so gilt auch $u \in L^\infty(G)$.
3. Konstruieren Sie eine Funktion $u \in \bigcap_{1\le p<\infty} L^p(0,1)$ mit $u \notin L^\infty(0,1)$.

Aufgabe 2: Baryzentrische Koordinaten 5 Punkte

Sei T ein n-dimensionales Simplex und $\mathbb{P}_2(T)$ der in der Vorlesung definierte Raum der Polynome vom Grad kleiner oder gleich 2 eingeschränkt auf T. Zeigen Sie, dass sich jedes $p \in \mathbb{P}_2(T)$ in baryzentrischen Koordinaten als

$$\overline{p}(\lambda) = \sum_{j=0}^{n} d_j\lambda_j + \sum_{\substack{i,j=0\\ i<j}}^{n} d_{ij}\lambda_i\lambda_j$$

schreiben lässt.

Aufgabe 3: Steifigkeitsmatrix 7 Punkte

1. Sei T_0 das Einheitsdreieck mit den Eckpunkten $0, e_1, e_2$, und $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2$ seien die Polynome ersten Grades mit $\varphi_i(e_j) = \delta_{ij}$, $i,j = 0,1,2$. Berechnen Sie die Elementsteifigkeitsmatrix
$$\left(\int_{T_0} \nabla\varphi_i \cdot \nabla\varphi_j \, dx\right)_{i,j=0,1,2}.$$
2. Berechnen Sie mit Hilfe des ersten Teils und der Transformationsformel die Elementsteifigkeitsmatrix für den Fall, dass T ein beliebiges Dreieck mit Eckpunkten a_0, a_1, a_2 ist.