Abteilung für Angewandte Mathematik 13.12.2010
Prof. Dr. M. Růžička, Philipp Nägele

Einführung in Theorie und Numerik partieller Differentialgleichungen

WS 2010/11 — Woche 8

Abgabe: Montag, den 20. Dezember, vor der Vorlesung

Aufgabe 1: Sobolev-Exponent — 5 Punkte

Sei $1 \leq p < n$ für $n \in \mathbb{N}$. Angenommen für alle $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ gelte die Abschätzung $\|u\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \leq c\,\|\nabla u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$. Zeigen Sie, dass dann schon $\frac{n}{q} = \frac{n}{p} - 1$ gelten muss. **Tipp:** betrachten Sie $u_\lambda(x) := u(\lambda x)$.

Aufgabe 2: Normäquivalenz — 7 Punkte

Seien $m, n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass es eine Konstante $C > 0$ gibt, so dass für jeden Ball $B \subset \mathbb{R}^n$ und jedes Polynom $p \in \mathbb{P}_m(B)$ gilt

$$\frac{1}{C}\,\|p\|_{L^\infty(B)} \leq \frac{1}{|B|}\,\|p\|_{L^1(B)} \leq C\,\|p\|_{L^\infty(B)}.$$

Aufgabe 3: $P_2 - P_0$ Element — 8 Punkte

Sei $G \subset \mathbb{R}^2$ ein beschränktes Gebiet mit polygonalem Rand. Sei außerdem $\mathcal{T}$ eine nichtdegenerierte Triangulierung von G zu Gitterweite h. Zu gegebenem $u \in H^1(G)$ und $T \in \mathcal{T}$ definieren wir $\Pi_2 u_{|T}$ durch

$$\begin{cases} \Pi_2 u_{|T} \in \mathbb{P}_2(T) & \\ \Pi_2 u_{|T}(E) = 0 & \text{für alle Ecken } E \text{ von } T \\ \int_K \Pi_2 u\, ds = \int_K u\, ds & \text{für alle Kanten } K \text{ von } T. \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass $\Pi_2 : H^1(G) \to \mathbb{P}_2(G)$ wohldefiniert und divergenzerhaltend auf jedem $T \in \mathcal{T}$ ist, das heißt

$$\int_T \operatorname{div}(\Pi_2 u - u)\, dx = 0.$$

Sei T_0 das Referenzdreieck. Zeigen Sie mit Hilfe des Satzes über das Skalierungsverhalten von Sobolev-Halbnormen sowie der Darstellung von $\Pi_2 u$ über Basisfunktionen die Abschätzung

$$|\Pi_2 u|_{1,T} \leq c\,\|\hat{u}\|_{1,T_0} \leq c\,(h(T)^{-1}|u|_{0,T} + |u|_{1,T}).$$