Abteilung für Angewandte Mathematik 20.12.2010
Prof. Dr. M. Růžička, Philipp Nägele

Einführung in Theorie und Numerik partieller Differentialgleichungen

WS 2010/11 — Woche 9
Abgabe: Montag, den 10. Januar, vor der Vorlesung

Aufgabe 1: Zusammenfassung EINZELABGABE **10 Punkte**

Fassen Sie die Ihrer Meinung nach wichtigsten Punkte des bisherigen Vorlesungsstoffs in einem „Überblick“ zusammen. Sie müssen dazu keinen Roman schreiben, aber Sie sollten dennoch 2 bis 3 prägnante Resultate oder Probleme genauer darstellen. Diese Aufgabe soll dazu dienen, sich (auch im Hinblick auf die Klausur) etwas eingehender mit dem Vorlesungsstoff zu beschäftigen und ist alleine zu bearbeiten!

Aufgabe 2: Fortsetzungsoperator und Dichtheit **10 Punkte**

Sei $1 \le p < \infty$, $n \in \mathbb{N}$ und sei $\mathbb{H} := \{(x_1, \dots, x_n) \,|\, x_n > 0\}$ der offene Halbraum in $\mathbb{R}^n$.

1. Zeigen Sie, dass sich jede Funktion $u \in W^{1,p}(\mathbb{H})$ mittels der Spiegelung
$$\bar{u}(x_1, x_2, \dots, x_n) := \eta(x_n)\Big(-3u(x_1, x_2, \dots, -x_n) + 4u\big(x_1, x_2, \dots, \tfrac{-x_n}{2}\big)\Big)$$
für $x_n \le 0$, wobei $\eta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine geeignete Abschneidefunktion ist, zu einer Funktion $\bar{u} \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ fortsetzen lässt.
2. Zeigen Sie, dass $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ dicht in $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ ist.
3. Zeigen Sie, dass $C_0^\infty(\overline{\mathbb{H}})$ dicht in $W^{1,p}(\mathbb{H})$ ist.

Wir wünschen Ihnen schöne Weihnachten, einen guten Rutsch und ein erfolgreiches neues Jahr!