Abteilung für Angewandte Mathematik 20.04.2015
Prof. Dr. M. Růžička, Hannes Eberlein

Funktionalanalysis

SS 2015 — Woche 1

Abgabe: Montag, den 27. April, vor der Vorlesung

Aufgabe 1: **3 Punkte**

Sei (M, d) ein metrischer Raum und $x_0 \in M$. Zeigen Sie, dass die Abbildung $f : M \to \mathbb{R}$, $f(x) := d(x, x_0)$ Lipschitzstetig mit Konstante 1 ist.

Aufgabe 2: (Lemma 3.13) **5 Punkte**

Seien (X, τ), (Y, σ) topologische Räume, sei $f : X \to Y$ eine Abbildung und besitze (X, τ) in jedem Punkt eine abzählbare Umgebungsbasis. Zeigen Sie, dass f genau dann stetig ist, wenn f folgenstetig ist.

Aufgabe 3: (Satz 2.5) **5 Punkte**

Seien X, Y normierte Vektorräume und $A : X \to Y$ eine lineare Abbildung. Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

a) A ist stetig,

b) A ist stetig in 0,

c) $\sup_{\|x\|_X \leq 1} \|Ax\|_Y < \infty$,

d) A ist beschränkt.

Definition:

Sei J eine nichtnegative Funktion aus $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ mit $J(x) = 0$, falls $\|x\| \geq 1$, und $\int_{\mathbb{R}^n} J(x)\ dx = 1$. Für $\varepsilon > 0$ definieren wir $J_\varepsilon(x) := \varepsilon^{-n} J(\frac{x}{\varepsilon})$. Wir nennen J_ε *Glättungsoperator* und die Konvolution

$$(J_\varepsilon * f)(x) := \int_{\mathbb{R}^n} J_\varepsilon(x-y) f(y)\ dy,$$

welche für Funktionen f definiert ist, für die die rechte Seite Sinn macht, heißt *Regularisierung* von f.

Aufgabe 4: **7 Punkte**

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Menge, $\varepsilon > 0$ und $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ mit $f = 0$ f.ü. außerhalb von Ω. Dabei bezeichnet $L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ die Menge aller messbaren Funktionen $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, die $f|_K \in L^1(K)$ für jede kompakte Menge $K \subset \mathbb{R}^n$ erfüllen. Zeigen Sie:

a) Für $f \in L^1(\Omega)$ gilt $J_\varepsilon * f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$.

b) Gilt $supp(f) \subset\subset \Omega$, so ist $J_\varepsilon * f \in C_0^\infty(\Omega)$ für $\varepsilon < dist(supp(f), \partial\Omega)$.

c) Für $f \in C(\Omega)$ und $K \subset\subset \Omega$ gilt: $\lim_{\varepsilon \searrow 0} J_\varepsilon * f(x) = f(x)$ gleichmäßig auf K.

d) Für $f \in L^p(\Omega)$, $1 \leq p < \infty$ gilt $J_\varepsilon * f \in L^p(\Omega)$ und $\|J_\varepsilon * f\|_{L^p(\Omega)} \leq \|f\|_{L^p(\Omega)}$ sowie $\lim_{\varepsilon \searrow 0} \|J_\varepsilon * f - f\|_{L^p(\Omega)} = 0$.

Tipp: Verwenden Sie Aufgabe 3 von den Anwesenheitsaufgaben und approximieren Sie f in Teil d) durch stetige Funktionen (siehe Satz 9.17, Analysis III).