Abteilung für Angewandte Mathematik 06.07.2015
Prof. Dr. M. Růžička, Hannes Eberlein

Funktionalanalysis

SS 2015 — Woche 11
Abgabe: Montag, den 13. Juli, vor der Vorlesung

Aufgabe 1: **2 Punkte**
Seien X, Y Banachräume und $T_k \in L(X,Y)$ eine Folge mit $\sup_{k\in\mathbb{N}} \|T_k\| = \infty$. Zeigen Sie, dass es ein $x \in X$ gibt mit $\sup_{k\in\mathbb{N}} \|T_k(x)\| = \infty$.

Aufgabe 2: **5 Punkte**
Sei X ein Banachraum und $f \in X^*$ mit $f \neq 0$. Wir betrachten die Hyperebene $E := \{f = 0\}$. Zeigen Sie

$$dist(x,E) := \inf_{x\in E} \|x - y\| = \frac{|\langle f, x\rangle|}{\|f\|}.$$

Tipp: Zeigen Sie zunächst $|\langle f, x\rangle| \leq \|f\|\, dist(x,E)$ und dann für festes $u \in X \setminus E$, dass $y_u(x) := x - \frac{\langle f,x\rangle}{\langle f,u\rangle} u \in E$ ist.

Aufgabe 3: (Satz von Baire) **5 Punkte**
Sei (X,d) ein nichtleerer, vollständiger, metrischer Raum und seien die Mengen $(A_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset X$ abgeschlossen. Für ein $x \in X$ und ein $\varepsilon > 0$ gelte

$$B_\varepsilon(x) \subset \bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k.$$

Zeigen Sie: Es existiert ein $k_0 \in \mathbb{N}$ mit $int(A_{k_0}) \neq \emptyset$.

Aufgabe 4: **5 Punkte**
Sei $|||\cdot|||$ eine Norm auf $C([0,1])$ mit den folgenden Eigenschaften:

a) $(C([0,1]), |||\cdot|||)$ ist vollständig.

b) Aus $\lim_{n\to\infty} |||f_n||| = 0$ folgt $\lim_{n\to\infty} f_n(t) = 0$ für alle $t \in [0,1]$.

Zeigen Sie, dass $|||\cdot|||$ äquivalent zur Standardnorm $\|\cdot\|_\infty$ von $C([0,1])$ ist.

Tipp: Wenden Sie den Satz vom abgeschlossen Graphen auf die Abbildung $\Lambda : (C([0,1]), |||\cdot|||) \to C([0,1], \|\cdot\|_\infty)$: $f \mapsto f$ an.

Aufgabe 5: **3 Punkte**
Seien $f_n, f \in C([0,1])$ derart, dass f_n schwach gegen f konvergiert. Zeigen Sie, dass f_n punktweise gegen f konvergiert.