

Funktionalanalysis

SS 2015 — Woche 12

Abgabe: Montag, den 20. Juli, vor der Vorlesung

Aufgabe 1:

5 Punkte

Sei X ein reflexiver Banachraum. Zeigen Sie, dass $(X, \tau(X, X^*))$ Folgen-vollständig ist, d.h. jede $\tau(X, X^*)$ -Cauchyfolge aus X hat einen schwachen Grenzwert in X . Eine Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset X$ heißt $\tau(X, X^*)$ -Cauchyfolge, falls es für jede $\tau(X, X^*)$ -Nullumgebung U einen Index $N_U \in \mathbb{N}$ gibt, so dass $x_n - x_m \in U$ für alle $n, m \geq N_U$.

Aufgabe 2:

5 Punkte

Sei X ein reflexiver Banachraum mit $\dim X = \infty$. Zeigen Sie:

- Jede offene, nichtleere Menge aus $(X, \tau(X, X^*))$ ist unbeschränkt.
- $(X, \tau(X, X^*))$ ist nicht metrisierbar.

Tipp: Verwenden Sie den Satz von Baire. Sie dürfen Aufgabe 1 benutzen!

Aufgabe 3:

4 Punkte

Sei X ein Banachraum und Y ein linearer Unterraum. Zeigen Sie: Y ist dicht in X genau dann, wenn $Y^\perp = \{0\}$.

Aufgabe 4:

6 Punkte

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ messbar und $f \in L^p(\Omega) \cap L^q(\Omega)$ mit $p, q \in [1, \infty]$. Sei r zwischen p und q , dann gilt $\frac{1}{r} = \frac{1-\theta}{p} + \frac{\theta}{q}$ für ein $\theta \in [0, 1]$ (hierbei gilt die Konvention $\frac{1}{\infty} = 0$). Zeigen Sie, dass $f \in L^r(\Omega)$ und dass

$$\|f\|_{L^r(\Omega)} \leq \|f\|_{L^p(\Omega)}^{1-\theta} \|f\|_{L^q(\Omega)}^\theta$$

gilt.

Die Klausur findet am Donnerstag, den 30. Juli um 08:00 Uhr im Rundbau statt. Vergessen Sie nicht, Ihre UniCard mitzubringen!