Abteilung für Angewandte Mathematik 27.04.2015
Prof. Dr. M. Růžička, Hannes Eberlein

Funktionalanalysis

SS 2015 — Woche 2
Abgabe: Montag, den 04. Mai, vor der Vorlesung

Aufgabe 1: **4 Punkte**

Sei Ω eine Lebesgue-messbare, beschränkte Menge und sei der Raum $\mathcal{M}$ gegeben durch

$$\mathcal{M} := \Big\{ f : \Omega \to \mathbb{R} \,\Big|\, f \text{ ist Lebesgue-messbar} \Big\},$$

wobei wir wie üblich nicht zwischen der Funktion f und seiner Äquivalenzklasse $[f]$ bzgl. der f.ü. Gleichheit unterscheiden. Zeigen Sie, dass

$$d(f,g) := \int_\Omega \frac{|f-g|}{1+|f-g|}\, dx$$

eine Metrik auf $\mathcal{M}$ ist.

Aufgabe 2: **6 Punkte**

Seien X und Y Banachräume und sei X_0 ein dichter Untervektorraum von X. Dann ist X_0 versehen mit der Norm von X ein normierter Raum. Zeigen Sie: Jedes $A \in L(X_0, Y)$ lässt sich eindeutig zu einem $\widetilde{A} \in L(X,Y)$ fortsetzen. Die Fortsetzung erfüllt $\|\widetilde{A}\|_{L(X,Y)} = \|A\|_{L(X_0,Y)}$.

Definition:

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und $u \in L^1_{loc}(\Omega)$. Die Funktion $u_i \in L^1_{loc}(\Omega)$ heißt *schwache Ableitung* von u bezüglich der i-ten Variablen, wenn

$$\int_\Omega u\, D_i\varphi\, dx = -\int_\Omega u_i\, \varphi\, dx \qquad \text{für alle } \varphi \in C_0^\infty(\Omega)$$

gilt und wird mit $\partial_i u$ oder auch $D_i u$ bezeichnet. Für $1 \le p \le \infty$ ist der Sobolev-Raum $W^{1,p}(\Omega)$ analog zu Definition 1.16 durch

$$W^{1,p}(\Omega) := \{u \in L^p(\Omega) \,|\, \partial_i u \in L^p(\Omega),\, i = 1, \dots, n\}$$

definiert und mit der Norm $\|u\|_{1,p} := (\|u\|^p_{L^p(\Omega)} + \sum_{i=1}^n \|\partial_i u\|^p_{L^p(\Omega)})^{\frac{1}{p}}$ versehen.

Aufgabe 3: **4 Punkte**

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und $1 \le p \le \infty$. Zeigen Sie, dass $W^{1,p}(\Omega)$ vollständig ist.

Aufgabe 4: **6 Punkte**

Besitzt die Funktion

$$\operatorname{sign} : \mathbb{R} \to \{-1, 1\}, \quad \operatorname{sign}(x) := \begin{cases} -1 & \text{falls } x \le 0 \\ 1 & \text{falls } x > 0 \end{cases}$$

eine schwache Ableitung nach obiger Definition? Begründen Sie ihre Antwort!