Abteilung für Angewandte Mathematik 04.05.2015
Prof. Dr. M. Růžička, Hannes Eberlein

Funktionalanalysis

SS 2015 — Woche 3
Abgabe: Montag, den 11. Mai, vor der Vorlesung

Aufgabe 1: **7 Punkte**

Sei Ω eine Lebesgue-messbare, beschränkte Menge mit positivem Maß und sei der metrische Raum $(\mathcal{M}, d)$ wie in Blatt 2, Aufgabe 1 gegeben.

a) Zeigen Sie, dass die Metrik d nicht durch eine Norm erzeugt wird (d.h. es gibt keine Norm $\|\cdot\|$ mit $\|f-g\| = d(f,g)$ für alle $f, g \in \mathcal{M}$).

b) Zeigen Sie, dass Konvergenz bezüglich der Metrik d äquivalent zur Konvergenz im Maß ist. Erinnerung: $f_n \to f$ im Maß gdw. $\forall \delta > 0$ gilt

$$\lim_{n\to\infty} \lambda\Big(\Big\{x \in \Omega \;\Big|\; |f_n(x) - f(x)| \geq \delta\Big\}\Big) = 0.$$

c) Zeigen Sie, dass $(\mathcal{M}, d)$ vollständig ist.

Tipp: Zeigen Sie in *c)*, dass die Menge der $x \in \Omega$, für die $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ keine Cauchy-Folge ist, eine Nullmenge ist. Benutzen Sie dazu Mengen der Form $\{x \in \Omega \,|\, \forall N \in \mathbb{N}\, \exists n, m \geq N : |f_n(x) - f_m(x)| \geq \frac{1}{k}\}$.

Aufgabe 2: **4 Punkte**

Sei V ein Vektorraum und ρ eine Metrik auf V, die translations- und skalierungsinvariante ist, d.h.

$$\rho(u+w, v+w) = \rho(u,v), \qquad \rho(\lambda u, \lambda v) = |\lambda|\, \rho(u,v) \quad \forall\, u, v \in V,\ \forall\, \lambda \in \mathbb{R}.$$

Zeigen Sie, dass $\|u\| := \rho(u, 0)$ eine Norm auf V definiert.

Definition:

Ein Banachraum X heißt *gleichmäßig konvex* genau dann, wenn für alle $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert so, dass für alle $x, y \in \overline{B_1(0)}$ mit $\|x - y\| > \varepsilon$ folgt $\|\frac{x+y}{2}\| < 1 - \delta$.

Aufgabe 3: **4 Punkte**

Sei H ein Hilbertraum. Zeigen Sie, dass H gleichmäßig konvex ist.

Aufgabe 4: **5 Punkte**

Sei X ein gleichmäßig konvexer Banachraum.

a) Seien die Folgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \overline{B_1(0)} \subset X$ mit $\|x_n\|, \|y_n\| \to 1$ sowie $\|(x_n + y_m)/2\| \to 1$ für $n, m \to \infty$ gegeben. Zeigen Sie, dass $\|x_n - y_m\| \to 0$ für $n, m \to \infty$ gilt.

b) Zeigen Sie die Aussage von *a)*, ohne die Voraussetzung $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \overline{B_1(0)}$, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \overline{B_1(0)}$ zu verwenden.