Abteilung für Angewandte Mathematik 11.05.2015
Prof. Dr. M. Růžička, Hannes Eberlein

Funktionalanalysis

SS 2015 — Woche 4
Abgabe: Montag, den 18. Mai, vor der Vorlesung

Aufgabe 1: **6 Punkte**

Sei X ein gleichmäßig konvexer Banachraum, $u \in X$ und sei V eine nichtleere, konvexe, abgeschlossene Teilmenge von X. Folgern Sie aus Blatt 3, Aufgabe 4 *b)*, dass es genau ein $v \in V$ mit $\operatorname{dist}(u, V) = \|u - v\|$ gibt. Diese v nennt man auch *Bestapproximierende* von u in V.

Aufgabe 2: **7 Punkte**

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet mit $\partial\Omega \in C^{0,1}$, $f \in L^2(\Omega)$ und $g \in H^{1,2}(\Omega)$. Zeigen Sie, dass

$$\begin{aligned} -\Delta u + u &= f \quad \text{in } \Omega \\ u &= g \quad \text{auf } \partial\Omega \end{aligned}$$

eine schwache Lösung $u \in H^{1,2}(\Omega)$ besitzt, d.h. u erfüllt

$$\sum_{i=1}^{n} \int_\Omega D_i u \, D_i v \; dx + \int_\Omega u \, v \; dx = \int_\Omega f \, v \; dx \qquad \forall v \in H_0^{1,2}(\Omega)$$

und es gilt $R(u) = R(g)$, wobei R den Spuroperator bezeichnet.

Tipp: Lösen Sie zunächst die Gleichung mit Dirichlet Nullrandwerten zu einer geeigneten rechten Seite $\widetilde{f}$.

Aufgabe 3: **4 Punkte**

Seien H_1, H_2 Hilberträume und sei $A : H_1 \to H_2$ linear und beschränkt. Zeigen Sie, dass $A^{**} = A$ sowie $\|A\|_{L(H_1,H_2)} = \|A^*\|_{L(H_2,H_1)}$ gilt.

Aufgabe 4: **3 Punkte**

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet, $H_1 = H_2 = L^2(\Omega, \mathbb{C})$ und $K \in L^2(\Omega \times \Omega, \mathbb{C})$.

a) Zeigen Sie, dass $A \in L(H_1, H_2)$ gilt, wobei

$$A : H_1 \to H_2, \quad (Au)(x) := \int_\Omega K(x,y) \, u(y) \; dy \quad (x \in \Omega).$$

b) Zeigen Sie, dass der adjungierte Operator $A^* \in L(H_2, H_1)$ durch

$$(A^* v)(y) = \int_\Omega \overline{K(x,y)} \, v(x) \; dx \quad (v \in H_2,\ x \in \Omega)$$

gegeben ist.