Abteilung für Angewandte Mathematik 18.05.2015
Prof. Dr. M. Růžička, Hannes Eberlein

Funktionalanalysis

SS 2015 — Woche 5
Abgabe: Montag, den 01. Juni, vor der Vorlesung

Aufgabe 1: **2 Punkte**

Sei H ein Hilbertraum und $u \in H$. Zeigen Sie die Normformel

$$\|u\| = \sup_{z \in H,\, \|z\|=1} |(z, u)|.$$

Aufgabe 2: **4 Punkte**

Sei X ein Banachraum und sei $E \subset X$ ein Untervektorraum mit $dim(E) < \infty$. Zeigen Sie, dass E abgeschlossen ist.

Aufgabe 3: **3 Punkte**

Gegeben sei der Raum der quadratsummierbaren Folgen

$$\ell^2 := \Big\{ (c_j)_{j \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{C} \;\Big|\; \sum_{j=1}^{\infty} |c_j|^2 < \infty \Big\},$$

der mit dem Skalarprodukt $(c, w)_{\ell^2} := \sum_{j=1}^{\infty} c_j \, \overline{w_j}$ versehen ist. Zeigen Sie, dass ℓ^2 vollständig und somit ein Hilbertraum ist.

Aufgabe 4: (Produktregel für Sobolev-Funktionen) **4 Punkte**

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen mit $\partial\Omega \in C^{0,1}$. Seien $u, v \in H^{1,2}(\Omega)$. Zeigen Sie $uv \in W^{1,1}(\Omega)$ sowie die Produktregel für die schwachen Ableitung

$$\partial_i(uv) = (\partial_i u)\, v + u\, (\partial_i v).$$

Tipp: Sie dürfen die Äquivalenz der Definitionen 1.10 und 1.15 annehmen.

Aufgabe 5: (Kettenregel für Sobolev-Funktionen) **7 Punkte**

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen mit $\partial\Omega \in C^{0,1}$. Sei $f \in C^1(\mathbb{R})$ mit $|f'| \leq M$ in $\mathbb{R}$ sowie $f(0) = 0$. Zeigen Sie: Ist $u \in H^{1,2}(\Omega)$, so ist auch $f(u) \in H^{1,2}(\Omega)$ und es gilt $D_i f(u) = f'(u)\, D_i u$.

Tipp: Auch hier dürfen Sie die Äquivalenz der Definitionen 1.10 und 1.15 annehmen. Verwenden Sie den Hauptsatz, um $f(u)$ abzuschätzen.