Abteilung für Angewandte Mathematik 01.06.2015
Prof. Dr. M. Růžička, Hannes Eberlein

Funktionalanalysis

SS 2015 — Woche 6
Abgabe: Montag, den 08. Juni, vor der Vorlesung

Aufgabe 1: **6 Punkte**
Sei $v \in L^2(-\pi,\pi)$ 2π-periodisch und $v_n(x) := v(nx)$ für $n \in \mathbb{N}$ und $x \in (-\pi,\pi)$. Zeigen Sie $v_n \rightharpoonup \frac{a_0}{2}$ in $L^2(-\pi,\pi)$ mit $a_0 := \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} v(x)\,dx$.

Tipp: Benutzen Sie die verallgemeinerte Fourierreihe um eine Darstellung von v (und somit v_n) zu erhalten.

Aufgabe 2: **2 Punkte**
Sei die Folge $u_n(x) := \sin^2(n\,x)$ für $n \in \mathbb{N}$ und $x \in (-\pi,\pi)$ gegeben. Dann ist $u_n \in L^2(-\pi,\pi) =: H$. Zeigen Sie, dass $u_n \rightharpoonup \frac{1}{2}$ in H gilt.

Bemerkung: Da u_n als Teilmenge eines VONS schwach gegen 0 konvegiert, haben wir somit (bezüglich dem schwachen Limes $(\lim_{n\to\infty} u_n)^2 = 0 \neq \frac{1}{2} = \lim_{n\to\infty} u_n^2$ gezeigt.

Aufgabe 3: **5 Punkte**
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, $\partial\Omega \in C^{0,1}$ und $u \in H^{1,2}(\Omega)$. Zeigen Sie, dass $|u| \in H^{1,2}(\Omega)$ mit

$$D_i|u| = \begin{cases} D_i u & \text{für } u > 0, \\ 0 & \text{für } u = 0, \\ -D_i u & \text{für } u < 0 \end{cases}$$

gilt.

Tipp: Approximieren Sie $u_+ := \max\{u, 0\}$ durch $f_\varepsilon(x) := \sqrt{x^2+\varepsilon^2} - \varepsilon$ für $x > 0$, $f_\varepsilon(x) := 0$ sonst.

Aufgabe 4: **7 Punkte**
Sei H ein Hilbertraum und $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}, (v_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset H$ mit $u_n \rightharpoonup u$ (schwach) und $v_n \to v$ (stark) in H.

a) Zeigen Sie die Konvergenz $(u_n, v_n) \to (u, v)$.

b) Gelte $\limsup \|u_n\| \leq \|u\|$. Zeigen Sie, dass $u_n \to u$ (stark) in H gilt.

Tipp: Sie dürfen Satz 6.6 verwenden.