Abteilung für Angewandte Mathematik 08.06.2015
Prof. Dr. M. Růžička, Hannes Eberlein

Funktionalanalysis

SS 2015 — Woche 7

Abgabe: Montag, den 15. Juni, vor der Vorlesung

Aufgabe 1: **6 Punkte**

Sei H ein Hilbertraum und $M \subset H$. Wir definieren den schwachen Folgenabschluss von M durch $\overline{M}^w := \{u \in H \mid \exists (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset M,\ u_n \rightharpoonup u\}$.

a) Sei $\overline{B_1(0)}$ der Abschluss (bezüglich der starken Konvergenz) von $B_1(0)$ und sei $\partial B_1(0)$ der zugehörige Rand. Zeigen Sie, dass $\overline{B_1(0)} = \{x \in H \mid \|x\| \leq 1\}$ und $\partial B_1(0) = \{x \in H \mid \|x\| = 1\}$.

b) Zeigen Sie $\overline{B_1(0)}^w = \overline{B_1(0)}$.

c) Zeigen Sie, dass der schwache Folgenabschluss einer Menge nicht notwendigerweise gleich dem starken Abschluss der Menge sein muss.

Aufgabe 2: **3 Punkte**

Sei H ein endlichdimensionaler Hilbertraum und $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset H$ mit $u_n \rightharpoonup u$ schwach in H. Zeigen Sie, dass $u_n \to u$ stark in H folgt.

Aufgabe 3: **6 Punkte**

Sei H ein Hilbertraum und $V \subset H$ eine dichte Teilmenge. Zeigen Sie die folgende Normformel für $u \in H$:

$$\|u\| = \sup_{v\in V,\, \|v\|\leq 1} |(v,u)|.$$

Aufgabe 4: **5 Punkte**

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f \in L^2_{loc}(\Omega)$. Zeigen Sie: Gibt es eine Konstante $C > 0$ mit $\sup_{\varphi\in C_0^\infty(\Omega),\, \|\varphi\|\leq 1} (\varphi, f) \leq C$, so folgt $f \in L^2(\Omega)$.

Tipp: Approximieren Sie Ω von innen durch kompakte Mengen und verwenden Sie das Lemma von Fatou.