Abteilung für Angewandte Mathematik 22.06.2015
Prof. Dr. M. Růžička, Hannes Eberlein

Funktionalanalysis

SS 2015 — Woche 9
Abgabe: Montag, den 29. Juni, vor der Vorlesung

Aufgabe 1: **7 Punkte**
Seien H_1, H_2 Hilberträume. Mit $K(H_1, H_2)$ bezeichnen wir die Menge der linearen, vollstetigen Operatoren von H_1 nach H_2. Zeigen Sie, dass $K(H_1, H_2) = L(H_1, H_2)$ genau dann gilt, wenn $dim\, H_1 < \infty$ oder $dim\, H_2 < \infty$.

Tipp: Zu “$\Rightarrow$”: Per Widerspruch. Wählen Sie Orthonormalsysteme $\{e_n\} \subset H_1$, $\{f_n\} \subset H_2$ und konstruieren Sie ein $T \in L(H_1, H_2)$ mit $T(e_n) = f_n$. Sie dürfen benutzen, dass die Projektionsabbildung, die dem Element $u \in H$ das eindeutige Element v aus dem Projektionssatz zuordnet, linear und stetig ist.

Aufgabe 2: **4 Punkte**
Sei H ein Hilbertraum. Zeigen Sie, dass die Menge der linearen, beschränkten Operatoren mit stetiger Inversen offen in $L(H, H)$ ist.

Aufgabe 3: **4 Punkte**
Sei H ein Hilbertraum und $A_n \in L(H, H)$ eine Folge von Operatoren, die in der Opertornorm gegen ein $A \in L(H, H)$ konvergieren. Sei weiter $\lambda_n \in \sigma(A_n)$ eine Folge, die gegen ein $\lambda \in \mathbb{C}$ konvergiert. Zeigen Sie $\lambda \in \sigma(A)$.

Aufgabe 4: **5 Punkte**
Sei $I = (0, 2\pi)$. Berechnen Sie die Eigenwerte der eindimensionalen Δ-Gleichung, d.h. die λ, so dass $u \neq 0 \in H_0^{1,2}(I)$ eine schwache Lösungen der Gleichung

$$\begin{aligned} -u'' &= \lambda\, u \qquad \text{in } I, \\ u(0) = u(2\pi) &= 0 \end{aligned}$$

ist. Wie üblich ist die schwache Lösung durch die Gleichung

$$(u', \varphi')_{L^2(I)} = \lambda\, (u, \varphi)_{L^2(I)} \qquad \forall \varphi \in H_0^{1,2}(I)$$

definiert.

Tipp: Sie dürfen verwenden, dass das System $\{\pi^{-\frac{1}{2}} \sin(\frac{n}{2}x)\}_{n\in\mathbb{N}}$ ein vollständiges Orthonormalsystem in $L^2(I)$ und das System $\{\frac{2}{\sqrt{\pi}n} \sin(\frac{n}{2}x)\}_{n\in\mathbb{N}}$ ein vollständiges Orthonormalsystem in $H_0^{1,2}(I)$ (versehen mit dem Skalarprodukt $(u, v)_{H_0^{1,2}(I)} := (u', v')_{L^2(I)}$) ist. Vergleichen Sie die Fourierdarstellungen bzgl. der verschiedenen Orthonormalsysteme.

Achtung: Bitte melden Sie sich bis zum 05.07.15 im LSF (nicht im HISinOne!) zur Klausur an.