Abteilung für Angewandte Mathematik 23.06.2016
Prof. Dr. M. Růžička, Hannes Eberlein

Modellierung

SS 2016 — Woche 9

Abgabe: Donnerstag, den 30. Juni, vor der Vorlesung

Definition: Legendre-Transformation

Sei $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ so, dass für alle $z \in \mathbb{R}^n$ die Funktion $f(\cdot, z)$ differenzierbar und $\partial_1 f(\cdot, z)$ invertierbar ist. Diese Inverse bezeichnen wir mit $(\partial_1 f)^{-1}(\cdot, z)$. Dann heißt

$$f^*(u, z) := f((\partial_1 f)^{-1}(u, z), z) - (\partial_1 f)^{-1}(u, z)\, u$$

die *Legendre-Transformierte* von f.

Tipp: Schreiben Sie für die folgenden Rechnungen z als Parameter einer Funktion.

Aufgabe 1: **3 Punkte**

Sei $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ so, dass für alle $z \in \mathbb{R}^n$ die Funktion $f(\cdot, z) \in C^2(\mathbb{R})$ eine strikt konvexe Funktion ist. Zeigen Sie, dass $(f^*)^*$ wohldefiniert ist und $(f^*)^*(x, z) = f(-x, z)$ gilt.

Aufgabe 2: **2 Punkte**

Rechnen Sie nach, dass die freie Energie $\psi(\theta, \gamma_\alpha)$ die Legendre-Transformierte der inneren Energie $e(\eta, \gamma_\alpha)$ ist.

Aufgabe 3: **3 Punkte**

Sei $f \in C^2(\mathbb{R})$ eine strikt konvexe Funktion. Zeigen Sie

$$f^*(u, z) = \min_{x \in \mathbb{R}} (f(x, z) - x\, u).$$

Aufgabe 4: **2 Punkte**

Sei $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ so, dass für alle $z \in \mathbb{R}^n$ die Funktion $f(\cdot, z) \in C^2(\mathbb{R})$ eine strikt konvexe Funktion ist. Zeigen Sie

$$f(x, z) - f^*(u, z) \geq x\, u \qquad \forall x, u \in \mathbb{R}.$$

Zeigen Sie weiter, dass bei Gleichheit in der Ungleichung bereits $x = (\partial_1 f)^{-1}(u, z)$ gilt.