Abteilung für Angewandte Mathematik
Prof. Dr. M. Růžička
F. Rösler

Analysis II

Die folgenden Fragen zum Stoff aus der Vorlesung sind ein Angebot zur Überprüfung des eigenen Wissens. Sie bilden den Stoff aus der Vorlesung nicht vollständig ab und reichen nicht als Klausurvorbereitung aus.

- Sei $f : (0, \pi) \to \mathbb{R}; f(x) = \sin(x)$. Was ist die Supremumsnorm $\|f\|$ von f?
- Sei $f : (0, 1) \to \mathbb{R}; f(x) = x^2$. Was ist die Supremumsnorm $\|f\|$ von f?
- $f_n \to f$ gleichmäßig, wenn ...
- $f_n \to f$ punktweise, wenn ...
- Eine Funktion heißt *Regelfunktion*, wenn ...
- Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine Regelfunktion. Wie ist das Regelintegral von f definiert?
- Sei $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ stetig. Wie ist das uneigentliche Integral $\int_0^\infty f(x)\,dx$ definiert?
- Beispiel für Folge von stetigen Funktionen, die punktweise gegen eine unstetige Funktion konvergiert.
- Angenommen, eine Funktion f lässt sich in eine Fourierreihe entwickeln. Wie sieht die allgemeine Form dieser Reihe aus?
- Definition metrischer Raum?
- Definition Berührpunkt, Häufungspunkt, Randpunkt?
- Richtig oder falsch?
  - $f_n \to f$ in $L^2 \;\Rightarrow\; f_n \to f$ punktweise.
  - $f_n \to f$ punktweise $\;\Rightarrow\; f_n \to f$ in L^2.
  - Sei $M = [0, 1] \subseteq \mathbb{R}$ mit der Metrik $d(x, y) = |x - y|$.
    - Die Menge $(\frac{1}{2}, 1)$ ist offen in M.
    - Die Menge $(\frac{1}{2}, 1]$ ist offen in M.
    - Sei $A := \{\frac{1}{2}\} \subseteq M$.
      - Der Punkt $x_0 = \frac{1}{2}$ ist Berührpunkt von A.
      - Der Punkt $x_0 = \frac{1}{2}$ ist Randpunkt von A.
      - Der Punkt $x_0 = \frac{1}{2}$ ist Häufungspunkt von A.
- Wann heißt eine Abbildung zwischen metrischen Räumen kontrahierend?

- Was besagt der Banach'sche Fixpunktsatz?
- Was besagt der Approximationssatz von Weierstraß?
- Def. zusammenhängend?
- Def. Norm / Skalarprodukt?
- M metrischer Raum, $x_0 \in M$. Zz: $f : M \to M;\ f(x) = d(x, x_0)$ ist stetig;
- Ist $x \mapsto \|x\|$ differenzierbar in $\mathbb{R}^n$?
- Richtig oder falsch?
  - $f : M \to N$ stetig, M kompakt $\Rightarrow$ N kompakt;
  - f stetig $\Leftrightarrow$ Urbilder offener Mengen sind offen;
  - f stetig $\Leftrightarrow$ Urbilder abgeschlossener Mengen sind abgeschlossen;
  - f stetig $\Leftrightarrow$ Urbilder kompakter Mengen sind kompakt; (Gegenbeispiel?)
  - f stetig $\Leftrightarrow$ Urbilder zusammmenhängender Mengen sind zusammenhängend; (Gegenbeispiel?)
  - M zusammenhängender metrischer Raum, $\emptyset \neq A \subseteq M$ offen und abgeschlossen $\Rightarrow\ A = M$; (Beweis?)
  - $A \subseteq M$ beschränkt und abgeschlossen $\Rightarrow$ A kompakt, falls
    (i) $M = \mathbb{R}^n$?
    (ii) M beliebiger metrischer Raum?
  - f differenzierbar $\Rightarrow$ f partiell differenzierbar nach allen Variablen;
  - f partiell differenzierbar nach allen Variablen $\Rightarrow$ f differenzierbar;
  - f differenzierbar $\Rightarrow\ f$ stetig;
  - f partiell differenzierbar $\Rightarrow\ f$ stetig;
- Was bedeutet die Notation "$f \in C^r(M)$" ?
- $\nabla f(x) = 0\ \Rightarrow$ Extremum bei x?
- Extremum bei $x \Rightarrow \nabla f(x) = 0$?
- Was besagt der Satz über Umkehrabbildung?
- Was besagt der Satz über implizite Funktionen?
- Lagrange-Multiplikatoren: Voraussetzung an Nebenbedingung G?
- Lagrange-Multiplikatoren: Falls $\nabla G(X_0)$ vollen Rang hat, $G(X_0) = 0$ und $\nabla f - \nabla\langle\lambda, G(X_0)\rangle = 0$, ist X_0 dann ein Extremum von $f|_{\{X|G(X)=0\}}$?
- Def. gleichgradig stetig?

- Was besagt der Satz von Arzelà-Ascoli?
- Wie schreibt man eine Gleichung n-ter Ordnung als System von n Gleichungen 1. Ordnung?
- Was sind die Gemeinsamkeiten / Unterschiede zwischen Picard-Lindelöf und Peano?
- Was ist die Bedingung für eindeutige Lösbarkeit einer gewöhnlichen DGL?
- Was ist ein Phasenportrait?
- Was ist ein $\left\{\begin{matrix}\text{stabiler}\\ \text{instabiler}\end{matrix}\right\} \left\{\begin{matrix}\text{Knoten}\\ \text{Sattelpunkt}\\ \text{Zentrum}\\ \text{Strudel}\end{matrix}\right\}$?