Abteilung für Angewandte Mathematik
Prof. Dr. M. Růžička
F. Rösler 16.4.2018

# Analysis II

SoSe 2018 — Woche 1

**Aufgabe 1:** (5 Punkte)

Es seien $\delta > 0$ und $f : (0, \infty) \to \mathbb{R};\ f(x) = \frac{1}{x^{1+\delta}}$.

(a) Man zeige: Das uneigentliche Integral $\int_1^\infty f(x)\,dx$ existiert.

(b) Man folgere, dass für jedes $\delta > 0$ die Reihe $\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^{1+\delta}}$ konvergiert.

**Aufgabe 2:** (5 Punkte)

Es sei $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ eine Funktionenfolge, sodass für jedes $n$ der Grenzwert $\lim_{x\to 1} f_n(x)$ existiert. Ferner existiere auch der Grenzwert $\lim_{x\to 1} (\lim_{n\to\infty} f_n(x))$.

(a) Man zeige: Falls die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig konvergiert, so gilt

$$\lim_{x\to 1}\left(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\lim_{x\to 1} f_n(x)\right).$$

(b) Man zeige durch ein Beispiel, dass dies im Falle punktweiser Konvergenz im Allgemeinen falsch ist.

**Aufgabe 3:** (6 Punkte)

Es seien $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ unendlich oft differenzierbar und $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion, sodass

- es existiert ein Intervall $[a,b]$, sodass $g(x) = 0$ außerhalb $[a,b]$,
- $g|_{[a,b]}$ ist stetig.

Wir definieren die *Faltung* von $f$ und $g$ durch

$$(f \star g)(x) := \int_{-\infty}^{\infty} f(x-t)g(t)\,dt.$$

Man zeige:

(a) $f\star g$ ist differenzierbar und es gilt $(f\star g)'(x) = (f'\star g)(x)$ (Sie dürfen benutzen, dass die Funktionen $f(x-t)g(t)$ und $f'(x-t)g(t)$ auf $\mathbb{R}\times[a,b]$ gleichmäßig stetig sind).

(b) Seien nun $n \in \mathbb{N}$ und $f_n(x) = \frac{n}{\pi(1+n^2x^2)}$ und $g(x) = \begin{cases} 1, & x \in [0,1] \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$.

Man berechne $f_n \star g$.

(c) (ohne Punkte) Man benutze einen Computer und vergleiche die Schaubilder von $f_n \star g$ und $g$ für große $n$.

**Aufgabe 4:** (4 Punkte)

Für eine differenzierbare $2\pi$-periodische Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ seien

$$a_k(f) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos(kx)\, dx, \qquad b_k(f) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin(kx)\, dx$$

und $c_k(f) := \frac{1}{2}(a_k(f) - i b_k(f))$. Man zeige:

$$c_k(f') = ikc_k(f).$$