Abteilung für Angewandte Mathematik
Prof. Dr. M. Růžička
F. Rösler 9.7.2018

Analysis II

SoSe 2018 — Woche 12

Aufgabe 1: (6 Punkte)

Es seien $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig und $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

(a) Man zeige, dass die *Bernoulli'sche Differentialgleichung*

$$z'(t) = f(t)z(t) + g(t)z(t)^\alpha$$

durch die Substitution $y := z^{1-\alpha}$ in die lineare Differentialgleichung

$$y'(t) = (1-\alpha)(f(t)y(t) + g(t))$$

überführt wird.

(b) Als Anwendung seien nun $f \equiv c_1,\ g \equiv c_2$ konstant mit $c_1, c_2 > 0$. Man zeige, dass das Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} z' &= c_1 z - c_2 z^2 \\ z(0) &= 1 \end{aligned}$$

eindeutig lösbar ist und bestimme die maximale Lösung.

Aufgabe 2: (8 Punkte)

Es sei

$$\mathbf{A} := \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

(a) Man bestimme eine Fundamentalmatrix von $\mathbf{Y}' = \mathbf{A}\mathbf{Y}$.

(b) Man berechne die Lösungen $\mathbf{Y}(t)$ mit $\mathbf{Y}(0) \in \{\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} -1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ -1 \end{smallmatrix}\right)\}$.

(c) Man zeichne die Phasenportraits für die Lösungen $\mathbf{Y}(t)$ mit $\mathbf{Y}(0) \in \{\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} -1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ -1 \end{smallmatrix}\right)\}$.

Aufgabe 3: (6 Punkte)

Es sei

$$\mathbf{A} := \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

(a) Man bestimme eine Fundamentalmatrix von $\mathbf{Y}' = \mathbf{A}\mathbf{Y}$.

(b) Man gebe eine Lösung zum Startwert $\mathbf{Y}(0) = (2, 1, 3)^\top$ an.

Bitte wenden!

Aufgabe 4*: (freiwillige Zusatzaufgabe) (8* Punkte)

In dieser Aufgabe wollen wir ein mathematisches Pendel beschreiben. Wir betrachten eine Masse m, die an einem Faden der Länge l hängt. Die Auslenkung aus der Ruhelage wird durch den Winkel φ beschrieben. Unser Ziel ist es, die Auslenkung $\varphi(t)$ zu einem beliebigen Zeitpunkt $t > 0$ zu berechnen.

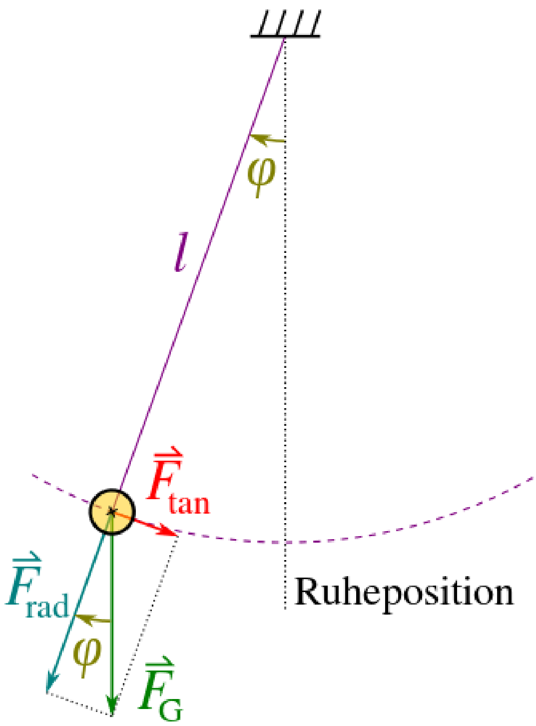

Abbildung 1: Mathematisches Pendel. Bild von Wikipedia.de

Die Newton'sche Bewegungsgleichung, zusammen mit elementarer Trigonometrie führt auf die Differentialgleichung

$$\varphi'' = -\frac{g}{l}\sin(\varphi), \tag{1}$$

wobei $g \approx 9,81\frac{m}{s^2}$ die Erdbeschleunigung ist.

(a) Man zeige: Gleichung (1) besitzt für $\varphi(0) \in (0, \frac{\pi}{2}),\ \varphi'(0) = 0$ eine eindeutige maximale Lösung.

(b) Man beweise den *Energieerhaltungssatz*: Ist φ eine Lösung von (1) und setzt man

$$V := mgl(1 - \cos\varphi)$$
$$T := \frac{m}{2}(l\varphi')^2,$$

dann gilt $\frac{d}{dt}(T + V) = 0$.

(c) Man folgere, dass jede maximale Lösung mit $\varphi(0) \in (0, \frac{\pi}{2}),\ \varphi'(0) = 0$ beschränkt ist (und somit auf ganz $\mathbb{R}$ definiert).

(d) Man zeige, dass jede Lösung $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $\varphi(0) \in (0, \frac{\pi}{2})$ und $\varphi'(0) = 0$ periodisch ist. (*Hinweis:* Phasenraum.)