Abteilung für Angewandte Mathematik 30.4.2018
Prof. Dr. M. Růžička
F. Rösler

Analysis II

SoSe 2018 — Woche 3

Aufgabe 1: (6 Punkte)

Sei M die Menge aller Folgen reeller Zahlen. Wir schreiben $x = (x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ und $y = (y_i)_{i\in\mathbb{N}}$ für Elemente $x, y \in M$. Man zeige: Die Abbildung

$$\begin{aligned} d : M \times M &\to \mathbb{R} \\ (x,y) &\mapsto \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \frac{|x_i - y_i|}{1 + |x_i - y_i|} \end{aligned}$$

ist eine Metrik auf M.

Aufgabe 2: (8 Punkte)

Man beweise Satz 1.14 in Kapitel 9:
Sei M ein metrischer Raum und $A \subseteq M$. Dann gelten

(i) Für das Innere A° gilt

$$A^\circ = \bigcup_{\substack{V \subseteq A,\\ V \text{ offen}}} V.$$

(ii) A° ist offen.

(iii) Für den Abschluss $\overline{A}$ gilt:

$$\overline{A} = \bigcap_{\substack{K \supseteq A,\\ K \text{ abgeschlossen}}} K$$

(iv) $\overline{A}$ ist abgeschlossen.

Bitte wenden!

Aufgabe 3: (6 Punkte)

In dieser Aufgabe wollen wir die sogenannte *induzierte Metrik* studieren (vgl. Definition 1.2). Sei (M, d) ein metrischer Raum und $M' \subseteq M$ eine Teilmenge. Wir definieren eine Metrik auf M' durch

$$\begin{aligned} d' &: M' \to \mathbb{R} \\ d'(x, y) &= d(x, y). \end{aligned}$$

Die Eigenschaften (a)–(c) aus Definition 1.1 erbt d' von d. Also ist das Paar (M', d') wieder ein metrischer Raum, in dem nach Definition 1.7 offene Mengen erklärt sind. Man zeige:

(a) Es bezeichne $U_d(x, \varepsilon)$ die offene Kugel bzgl. d und $U_{d'}(x, \varepsilon)$ die offene Kugel bzgl. d'. Dann gilt für beliebige $x \in M'$:

$$U_{d'}(x, \varepsilon) = U_d(x, \varepsilon) \cap M'$$

(b) Eine Menge $U \subseteq M'$ ist genau dann offen in (M', d'), wenn eine Menge $V \subseteq M$ existiert, sodass

   (i) V ist offen in (M, d) und

   (ii) $U = V \cap M'$.

   Eine solche Menge U heißt auch *relativ offen* in M'.