Abteilung für Angewandte Mathematik
Prof. Dr. M. Růžička
F. Rösler

14.5.2018

Analysis II

SoSe 2018 — Woche 5

Aufgabe 1: (6 Punkte)

Welche der folgenden Gleichheiten sind für beliebige $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$ korrekt ($\mathbb{R}^n$ mit der euklidischen Metrik)? Man bearbeite 4 der 6 Teilaufgaben.

(a) $\left(\overline{A}\right)^\circ = A^\circ$

(b) $\overline{A^\circ} = \overline{A}$

(c) $A^\circ \cap B^\circ = (A \cap B)^\circ$

(d) $A^\circ \cup B^\circ = (A \cup B)^\circ$

(e) $\overline{A} \cap \overline{B} = \overline{A \cap B}$

(f) $\overline{A} \cup \overline{B} = \overline{A \cup B}$

Aufgabe 2: (6 Punkte)

Sei M ein metrischer Raum und $x, y \in M$. Eine stetige Abbildung $\gamma : [0,1] \to M$ mit $\gamma(0) = x$ und $\gamma(1) = y$ heißt *Weg* von x nach y. Ein metrischer Raum M heißt *wegzusammenhängend*, falls es für alle $x, y \in M$ einen Weg $\gamma : [0,1] \to M$ von x nach y gibt.

(a) Man zeige: Jeder wegzusammenhängende metrische Raum ist zusammenhängend.

Hinweis: Der Beweis von Satz 4.9 kann als Inspiration dienen.

(b) Man zeige: Die offene Einheitskugel $B := U(0,1) \subseteq \mathbb{R}^2$ ist zusammenhängend.

(c) Sei $I := (0,1)$ das offene Einheitsintervall in $\mathbb{R}$. Gibt es eine stetige, bijektive Abbildung $f : B \to I$?

Hinweis: Man betrachte die Menge $I \setminus \{\frac{1}{2}\}$.

Bitte wenden!

Aufgabe 3: (4 Punkte)

(a) Man zeige: Ist V ein reeller Vektorraum und $\langle \cdot , \cdot \rangle$ ein Skalarprodukt auf V und $\| \cdot \| := \sqrt{\langle \cdot , \cdot \rangle}$ die zugehörige Norm, so gilt

$$\langle x, y \rangle = \frac{1}{4} \left(\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2 \right) .$$

(b) Man zeige: Es gibt kein Skalarprodukt $\langle \cdot , \cdot \rangle_{\max}$ auf $\mathbb{R}^n$, sodass $\|x\|_{\max} = \sqrt{\langle x, x \rangle_{\max}}$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$.

Aufgabe 4: (4 Punkte)

Sei (M, d) ein metrischer Raum und $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine konvergente Folge in M (etwa gegen $x \in M$). Man zeige: Die Menge $A := \{x, x_1, x_2, x_3, \dots\}$ ist kompakt.