Abteilung für Angewandte Mathematik 28.5.2018
Prof. Dr. M. Růžička
F. Rösler

Analysis II

SoSe 2018 — Woche 6

Aufgabe 1: (5 Punkte)

Es sei $M \subseteq \mathbb{R}^n$ offen. Man beweise die Produktregel: Sind $f, g : M \to \mathbb{R}$ total differenzierbar, so ist auch $f \cdot g$ total differenzierbar und es gilt

$$D(fg)_X = g(X)D(f)_X + f(X)D(g)_X$$

für alle $X \in M$.

Aufgabe 2: (5 Punkte)

Man untersuche, an welchen Punkten die folgenden Funktionen partiell differenzierbar sind und berechne ggf. die partiellen Ableitungen.

(a) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}; \quad f(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{für } x = 0 \text{ oder } y = 0 \\ 1 & \text{sonst;} \end{cases}$

(b) $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}; \quad g(x,y) = \sqrt{|xy|}$.

Aufgabe 3: (5 Punkte)

Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)\sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right), & \text{falls } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{falls } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Man zeige:

(a) f ist in $(0,0)$ total differenzierbar mit Ableitung $\nabla f(0,0) = (0,0)$;

(b) die partiellen Ableitungen von f in $(0,0)$ sind nicht stetig.

Aufgabe 4: (5 Punkte)

Es sei $\varnothing \neq U \subseteq \mathbb{R}^n$ zusammenhängend und offen. Man zeige: Dann ist U wegzusammenhängend.

Hinweis: Inspiration findet sich im Beweis von Folgerung 1.9, Kapitel 11