Abteilung für Angewandte Mathematik 4.6.2018
Prof. Dr. M. Růžička
F. Rösler

Analysis II

SoSe 2018 — Woche 7

Aufgabe 1: (4 Punkte)

Es sei $F : (0,\infty) \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ definiert durch

$$F(r,\theta,\phi) := \begin{pmatrix} r\sin(\theta)\cos(\phi) \\ r\sin(\theta)\sin\phi) \\ r\cos(\theta) \end{pmatrix}.$$

(i) Man berechne die Jacobi-Matrix und die Jacobi-Determinante von F in Äbhängigkeit von (r,θ,ϕ);

(ii) In welchen Punkten (r,θ,ϕ) ist $JF(r,\theta,\phi)$ invertierbar?

Aufgabe 2: (6 Punkte)

Es sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x,y) = \begin{cases} \sqrt{x^2+y^2}, & y > 0 \\ x, & y = 0, \\ -\sqrt{x^2+y^2}, & y < 0. \end{cases}$$

Man zeige:

(i) Alle Richtungsableitungen von f existieren in $(0,0)$.

(ii) f ist in $(0,0)$ nicht differenzierbar;

Aufgabe 3: (5 Punkte)

Man bestimme die Taylorentwicklung von

$$f : (0,\infty) \times (0,\infty) \to \mathbb{R}$$
$$f(x,y) = \frac{x-y}{x+y}$$

im Punkt $(1,1)$ bis einschließlich der Glieder zweiter Ordnung.

Bitte wenden!

Aufgabe 4: (5 Punkte)

Es sei $M \subseteq \mathbb{R}$ offen. Wir definieren den *Laplaceoperator* Δ durch

$$\Delta : C^2(M) \to C(M)$$
$$\Delta u := \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_k \partial x_k}.$$

(a) Man zeige: Für alle $f, g \in C^2(M)$ gilt

$$\Delta(fg) = g\Delta f + 2\langle \nabla f, \nabla g\rangle + f\Delta g$$

(b) Eine Funktion $u \in C^2(M)$ heißt *harmonisch*, falls $\Delta u = 0$. Man verifiziere, dass die Funktionen $\Phi_n : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ mit

$$\Phi_n(x) = \begin{cases} \log \|x\|, & n = 2 \\ \|x\|^{2-n}, & n > 2 \end{cases}$$

harmonisch sind.