Abteilung für Angewandte Mathematik
Prof. Dr. M. Růžička
F. Rösler 11.6.2018

Analysis II

SoSe 2018 — Woche 8

Aufgabe 1: (7 Punkte)

Es bezeichne $M(n,\mathbb{R})$ die Menge aller $(n\times n)$-Matrizen mit reellen Einträgen. Wir definieren eine Abbildung $f : M(n,\mathbb{R}) \to M(n,\mathbb{R})$ durch $f(A) = A^2$ (Matrizenprodukt).

(a) Man zeige, dass f differenzierbar ist und berechne die Ableitung von f.

Hinweis: Die Ableitung muss eine lineare Abbildung $M(n,\mathbb{R}) \to M(n,\mathbb{R})$ sein. Hierbei kann $M(n,\mathbb{R})$ mit $\mathbb{R}^{n^2}$ identifiziert werden.

(b) Sei nun $n = 2$. Man untersuche, ob f in einer Umgebung der Punkte

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

eine lokale Umkehrabbildung hat.

Aufgabe 2: (7 Punkte)

Es seien $(1,0), (\cos(x),\sin(x)), (\cos(y),\sin(y))$ die Ecken eines dem Einheitskreis einbeschriebenen Dreiecks. Dessen (orientierter) Flächeninhalt ist gegeben durch die Funktion

$$f(x,y) = \frac{1}{2}\det\begin{pmatrix} \cos(x)-1 & \sin(x) \\ \cos(y)-1 & \sin(y) \end{pmatrix}, \qquad (x,y) \in [0,2\pi)^2.$$

Man bestimme diejenigen Punkte x_0, y_0, an denen der Flächeninhalt maximal wird. Wie sieht das zugehörige Dreieck aus?

Aufgabe 3: (6 Punkte)

Seien $M \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt und $u \in C^2(M) \cap C^0(\overline{M})$.

(a) Man beweise das *schwache Maximumsprinzip*: Sei $b \in \mathbb{R}^n$. Falls

$$-\Delta u + \langle b, \nabla u\rangle < 0$$

auf M, so gilt

$$\max\{u(x) \,|\, x \in \overline{M}\} = \max\{u(x) \,|\, x \in \partial M\}.$$

(b) Die Folgerung aus (a) gilt sogar wenn nur $-\Delta u + \langle b, \nabla u\rangle \le 0$ auf M.