

FREIBURGER FUNKTIONALIST

PROF. DR. M. RŮŽIČKA, DR. M. KŘEPELA

WOCHE 1

ABGABE BIS 29.4.2019, 12 UHR

Aufgabe 1

4 Punkte

Seien X, Y normierte Vektorräume und $A : X \rightarrow Y$ ein linearer Operator. Beweisen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

- (a) A ist Lipschitz-stetig,
- (b) A ist stetig,
- (c) A ist stetig in 0 ,
- (d) Es gilt $\sup_{\|x\|_X \leq 1} \|Ax\|_Y < \infty$,
- (e) A ist beschränkt.

Aufgabe 2

5 Punkte

Überprüfen Sie, ob der Operator $T : X \rightarrow Y$ linear ist und ob er stetig und/oder beschränkt ist.

- (a) $X = (C^1([0, 1]), \|\cdot\|_\infty)$, $Y = (C([0, 1]), \|\cdot\|_\infty)$, $Tf = f'$.
- (b) $X = (L^1([0, 1]), \|\cdot\|_1)$, $Y = (\mathbb{R}, |\cdot|)$, $Tf = \sup\{c \geq 0 \mid c \leq |f| \text{ f.ü. auf } [0, 1]\}$.

Definition. Eine *algebraische Basis (Hamel-Basis)* eines Vektorraumes X ist eine linear unabhängige Menge $\mathcal{B} \subset X$, so dass jedes $x \in X$ als endliche Linearkombination von Elementen aus \mathcal{B} darstellbar ist. Die *Dimension* von X ist die Anzahl der Elemente von \mathcal{B} .

Aufgabe 3

5 Punkte

Sei $(X, \|\cdot\|_X)$ ein normierter Vektorraum mit algebraischer Basis \mathcal{B} .

- (a) Sei $\varphi \in L(X, \mathbb{R})$. Zeigen Sie, dass φ durch seine Werte auf \mathcal{B} definiert ist, d.h. wenn $\varphi(x)$ für alle $x \in \mathcal{B}$ definiert ist, dann existiert genau ein lineares Funktional $\bar{\varphi} : X \rightarrow \mathbb{R}$ so, dass $\varphi(x) = \bar{\varphi}(x)$ für alle $x \in \mathcal{B}$ gilt.
- (b) Zeigen Sie, dass ein unbeschränktes lineares Funktional $\varphi : X \rightarrow \mathbb{R}$ genau dann existiert, wenn $\dim X = \infty$ gilt.

Tipp: Betrachten Sie eine abzählbare Untermenge der Basis und definieren Sie ein geeignetes Funktional darauf.

Aufgabe 4

6 Punkte

Seien (X, τ) ein topologischer Raum und $M \subset X$. Zeigen Sie das Folgende:

- (a) Die Menge M ist offen genau dann, wenn sie Umgebung all ihrer Punkte ist.
- (b) Der Abschluss der Menge M ist abgeschlossen.
- (c) Das Innere der Menge M ist offen.
- (d) M abgeschlossen \Rightarrow für alle Folgen $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset M$ mit $x_n \rightarrow x$ gilt $x \in M$.
- (e) Setzen wir voraus, dass jeder Punkt von X eine abzählbare Umgebungsbasis besitzt, dann gilt auch „ \Leftarrow “ in (d).