FREIBURGER FUNKTIONALIST

Aufgabe 39 **5 Punkte**

Sei H ein Hilbertraum mit dem Skalarprodukt $(\cdot,\cdot)$ und der Norm $\|\cdot\|$. Sei $(\varphi_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ ein Orthonormalsystem in H und $f \in H$. Für $n \in \mathbb{N}$ sei $P_n f := \sum_{k=-n}^{n} (f, \varphi_k)\varphi_k$. Zeigen Sie das Folgende:

(a) Es gilt $\lim_{k\to\pm\infty}(f, \varphi_k) = 0$.

Tipp: Bessel.

(b) Es existiert ein $h \in H$ so, dass $\lim_{n\to\infty} \|P_n f - h\| = 0$. Was ist h, wenn $(\varphi_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ zusätzlich vollständig ist?

Tipp: Cauchyfolgenargument und Bessel.

Im Folgenden sei $L^2((-\pi, \pi))$ der komplexe normierte Vektorraum der messbaren Funktionen $f : (-\pi, \pi) \to \mathbb{C}$, wobei die Norm $\|\cdot\|_2$ durch das Skalarprodukt

$$(f, g) := \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\overline{g(x)}\,\mathrm{d}x$$

induziert ist.

Aufgabe 40 **4 Punkte**

Zeigen Sie, dass die Funktionen

$$e_k := \tfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ikx}, \qquad k \in \mathbb{Z},$$

ein Orthonormalsystem in $L^2((-\pi, \pi))$ bilden.

Aufgabe 41 **6 Punkte**

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ eine 2π-periodische Funktion so, dass $\operatorname{Re} f, \operatorname{Im} f \in C^1(\mathbb{R})$ gilt. Sei $x_0 \in [-\pi, \pi]$. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ definieren wir $P_n f := \sum_{k=-n}^{n}(f, e_k)e_k$. Zeigen Sie das Folgende:

(a) Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\begin{aligned}(P_n f)(x_0) - f(x_0) &= \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-n}^{n} \int_{-\pi}^{\pi} (f(x_0 + z) - f(x_0))e^{-ikz}\,\mathrm{d}z \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(x_0 + z) - f(x_0)}{1 - e^{-iz}} \left(e^{2inz} - e^{-i(n+1)z}\right)\mathrm{d}z.\end{aligned}$$

Tipp: $\sum_{k=-n}^{n} e^{-ikz}$ summiert man als eine geometrische Reihe.

(b) Die Funktion $g : (0, 2\pi) \to \mathbb{C}$, definiert durch

$$g(z) := \frac{f(x_0 + z) - f(x_0)}{1 - e^{-iz}},$$

ist beschränkt auf $(0, 2\pi)$, d.h. es gilt $\sup_{z\in(0,2\pi)} |g(z)| < \infty$.

(c) Es gilt $(P_n f)(x_0) \to f(x_0)$, d.h. die Fourierreihe konvergiert punktweise.

Tipp: Wenn $g \in L^2((-\pi, \pi))$ ist, kann man Aufgabe 39(a) auf (g, e_{-2n}) und (g, e_{n+1}) anwenden.

Aufgabe 42 **5 Punkte**

Zeigen Sie, dass das Orthonormalsystem $(e_k)_{k\in\mathbb{N}}$ vollständig in $L^2((-\pi, \pi))$ ist.

Tipp: Nutzen Sie die Dichtheit glatter Funktionen und die restlichen Aufgaben.

Aufgabe 39 **5 Punkte**

Sei H ein Hilbertraum mit dem Skalarprodukt $(\cdot,\cdot)$ und der Norm $\|\cdot\|$. Sei $(\varphi_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ ein Orthonormalsystem in H und $f \in H$. Für $n \in \mathbb{N}$ sei $P_n f := \sum_{k=-n}^{n} (f, \varphi_k)\varphi_k$. Zeigen Sie das Folgende:

(a) Es gilt $\lim_{k\to\pm\infty}(f,\varphi_k) = 0$.

Tipp: Bessel.

(b) Es existiert ein $h \in H$ so, dass $\lim_{n\to\infty} \|P_n f - h\| = 0$. Was ist h, wenn $(\varphi_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ zusätzlich vollständig ist?

Tipp: Cauchyfolgenargument und Bessel.

Im Folgenden sei $L^2((-\pi,\pi))$ der komplexe normierte Vektorraum der messbaren Funktionen $f : (-\pi,\pi) \to \mathbb{C}$, wobei die Norm $\|\cdot\|_2$ durch das Skalarprodukt

$$(f,g) := \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\overline{g(x)}\,\mathrm{d}x$$

induziert ist.

Aufgabe 40 **4 Punkte**

Zeigen Sie, dass die Funktionen

$$e_k := \tfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ikx}, \qquad k \in \mathbb{Z},$$

ein Orthonormalsystem in $L^2((-\pi,\pi))$ bilden.

Aufgabe 41 **6 Punkte**

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ eine 2π-periodische Funktion so, dass $\operatorname{Re} f, \operatorname{Im} f \in C^1(\mathbb{R})$ gilt. Sei $x_0 \in [-\pi,\pi]$. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ definieren wir $P_n f := \sum_{k=-n}^{n} (f, e_k)e_k$. Zeigen Sie das Folgende:

(a) Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\begin{aligned}(P_n f)(x_0) - f(x_0) &= \frac{1}{2\pi}\sum_{k=-n}^{n}\int_{-\pi}^{\pi}(f(x_0+z) - f(x_0))e^{-ikz}\,\mathrm{d}z \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{f(x_0+z)-f(x_0)}{1-e^{-iz}}\left(e^{inz} - e^{-i(n+1)z}\right)\mathrm{d}z.\end{aligned}$$

Tipp: $\sum_{k=-n}^{n} e^{-ikz}$ summiert man als eine geometrische Reihe.

(b) Die Funktion $g : (0,2\pi) \to \mathbb{C}$, definiert durch

$$g(z) := \frac{f(x_0+z) - f(x_0)}{1-e^{-iz}},$$

ist beschränkt auf $(0,2\pi)$, d.h. es gilt $\sup_{z\in(0,2\pi)} |g(z)| < \infty$.

(c) Es gilt $(P_n f)(x_0) \to f(x_0)$, d.h. die Fourierreihe konvergiert punktweise.

Tipp: Wenn $g \in L^2((-\pi,\pi))$ ist, kann man Aufgabe 39(a) auf (g, e_{-n}) und (g, e_{n+1}) anwenden.

Aufgabe 42 **5 Punkte**

Zeigen Sie, dass das Orthonormalsystem $(e_k)_{k\in\mathbb{N}}$ vollständig in $L^2((-\pi,\pi))$ ist.

Tipp: Nutzen Sie die Dichtheit glatter Funktionen und die restlichen Aufgaben.