FREIBURGER FUNKTIONALIST

Definition. Seien X, Y Banachräume und sei $T \in L(X, Y)$. Der Operator T heißt *kompakt*, wenn er beschränkte Mengen auf relativ kompakte Mengen abbildet. Wenn T schwach konvergente Folgen auf stark konvergente Folgen abbildet, heißt T *vollstetig*.

Aufgabe 43 — 5 Punkte

Seien H_1 und H_2 Hilberträume und $T \in L(H_1, H_2)$. Zeigen Sie, das der Operator T genau dann kompakt ist, wenn er vollstetig ist.

Tipp zu „$\Rightarrow$“: Lineare, stetige Operatoren bilden schwach konvergente Folgen auf schwach konvergente Folgen ab.

Aufgabe 44 — 6 Punkte

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt. Für $k \in L^2(\Omega \times \Omega)$ definieren wir

$$(Kf)(x) := \int_\Omega k(x, y) f(y)\, \mathrm{d}y.$$

(a) Sei $k \in C(\overline{\Omega \times \Omega})$. Zeigen Sie, dass $K : L^2(\Omega) \to L^2(\Omega)$ dann kompakt ist.
Tipp: Zeigen Sie mit Hilfe von Arzelà-Ascoli, dass $K : L^2(\Omega) \to C(\overline{\Omega})$ kompakt ist.

(b) Sei $k \in L^2(\Omega \times \Omega)$. Zeigen Sie, dass $K : L^2(\Omega) \to L^2(\Omega)$ dann kompakt ist.
Tipp: Approximieren Sie k und nutzen Sie, dass der Grenzwert kompakter Operatoren kompakt ist.

Aufgabe 45 — 5 Punkte

Seien X_1, X_2, X_3 Banachräume, $K \in K(X_1, X_2)$ und $T \in L(X_2, X_3)$. Ferner sei T injektiv. Zeigen Sie, dass es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $C_\varepsilon > 0$ gibt so, dass

$$\|Kx\|_{X_2} \le \varepsilon \|x\|_{X_1} + C_\varepsilon \|TKx\|_{X_3}$$

für alle $x \in X_1$ gilt.

Tipp: Beweis durch Widerspruch.

Aufgabe 46 — 4 Punkte

Zeigen Sie, dass jeder unendlichdimensionale, separable Hilbertraum H isometrisch isomorph zu ℓ^2 ist.