

FREIBURGER FUNKTIONALIST

PROF. DR. M. RŮŽIČKA, DR. M. KŘEPELA

WOCHE 2

ABGABE BIS 6.5.2019, 12 UHR

Aufgabe 5

6 Punkte

Sei $X = (L^\infty(-1, 1), \|\cdot\|_\infty)$. Für $f \in X$ definiere

$$\langle \varphi, f \rangle = \varphi(f) := \int_{-1}^1 t f(t) dt.$$

- Berechnen Sie die Norm $\|\varphi\|_{X^*}$.
- Finden Sie eine Funktion $f \in X$ mit $\|f\|_X = 1$ so, dass $\varphi(f) = \|\varphi\|_{X^*}$ gilt, oder beweisen Sie, dass keine solche Funktion existiert.
- Beantworten Sie (a) und (b), falls $X = (C([-1, 1]), \|\cdot\|_\infty)$ ist.

Aufgabe 6

4 Punkte

Seien X, Y Banachräume, $(X_0, \|\cdot\|_X)$ ein dichter Untervektorraum von X und sei $T \in L(X, Y)$. Zeigen Sie, dass gilt

$$\|T\|_{L(X, Y)} = \sup_{\substack{x \in X \\ \|x\|_X = 1}} \|T(x)\|_Y = \sup_{\substack{x \in X_0 \\ \|x\|_X = 1}} \|T(x)\|_Y.$$

Aufgabe 7

4 Punkte

Sei X ein Banachraum und sei $E \subset X$ ein Untervektorraum mit $\dim E < \infty$. Zeigen Sie, dass E abgeschlossen ist.

Aufgabe 8

6 Punkte

Sei X ein Banachraum und sei $E \subset X$ ein abgeschlossener Untervektorraum. Für jedes $x \in X$ definiere $\hat{x} := \{z \in X \mid x - z \in E\}$. Dann ist

$$X/E := \{\hat{x} \mid x \in X\}$$

ein Vektorraum. Wir definieren

$$\|\hat{x}\|_{X/E} := \inf_{y \in E} \|x - y\|_X.$$

Zeigen Sie das Folgende:

- $\|\hat{x}\|_{X/E}$ ist wohldefiniert, d.h. aus $\hat{x} = \hat{z}$ folgt $\|\hat{x}\|_{X/E} = \|\hat{z}\|_{X/E}$.
- $\|\cdot\|_{X/E}$ ist eine Norm auf X/E . Dies ist die *Quotientennorm*.
- $(X/E, \|\cdot\|_{X/E})$ ist ein Banachraum.

Tipp: Sei $(\hat{x}_n)_n$ eine Cauchyfolge in X/E . Dann kann man wie folgt vorgehen:

- Wählen Sie eine Teilfolge $(\hat{x}_k)_k$ so, dass $\|\hat{x}_k - \hat{x}_j\|_{X/E} \leq 2^{-k}$ für alle $j \geq k$ gilt;
- Wählen Sie eine Folge $(e_k)_k$ in E so, dass $\|x_k - e_k - x_{k+1} + e_{k+1}\|_X \leq \|\hat{x}_k - \hat{x}_{k+1}\|_{X/E} + 2^{-k}$ gilt;
- $x_k - e_k \rightarrow x \in X$;
- $\|\hat{x}_k - \hat{x}\|_{X/E} \rightarrow 0$.