FREIBURGER FUNKTIONALIST

Aufgabe 9 **3 Punkte**

Sei V ein normierter Vektorraum und $u \in V \setminus \{0\}$. Dann existiert ein Funktional $f \in V^*$ so, dass $\|f\|_{V^*} = 1$ und $\langle f, u \rangle = \|u\|_{V^*}$. Sei zusätzlich $\|\cdot\|_{V^*}$ strikt konvex, d.h. für alle $t \in (0,1)$ und $f_0, f_1 \in X$ mit $f_0 \neq f_1$ und $\|f_0\|_{X^*} = \|f_1\|_{X^*} = 1$ gilt

$$\|(1-t)\, f_0 + t\, f_1\|_{V^*} < 1.$$

Zeigen Sie, dass f eindeutig bestimmt ist.

Aufgabe 10 **6 Punkte**

Sei V ein normierter Vektorraum und $g : V \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$. Zeigen Sie das Folgende:

(a) g ist unterhalbstetig genau dann, wenn $\operatorname{epi}(g)$ abgeschlossen ist.

(b) g ist unterhalbstetig genau dann, wenn $\{x \in V \mid g(x) > \lambda\}$ für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ offen ist.

(c) g ist konvex genau dann, wenn $\operatorname{epi}(g)$ konvex ist.

(d) Sei $\{g_j : V \to \mathbb{R} \cup \{\infty\},\ j \in J\}$ eine Familie unterhalbstetiger Funktionen. Dann ist die Funktion $g := \sup_{j \in J} g_j$ (punktweise definiert) unterhalbstetig.

Aufgabe 11 **5 Punkte**

Zeigen Sie, dass es eine Funktion $g \in C([0,1])$ gibt, welche in keinem Punkt des Intervalls $[0,1]$ differenzierbar (nicht einmal einseitig) ist.

Tipp: Betrachten Sie dazu für $n \in \mathbb{N}$ die Mengen

$$M_n := \left\{ f \in C([0,2]) \,\middle|\, \exists x_0 \in [0,1] \text{ mit } \sup_{0<h<1} \frac{|f(x_0+h) - f(x_0)|}{h} \leq n \right\}$$

und beweisen Sie, dass M_n in $C([0,2])$ abgeschlossen ist, aber keine inneren Punkte besitzt.

Aufgabe 12 **6 Punkte**

Zeigen Sie das Folgende:

(a) Sei E ein unendlichdimensionaler Banachraum. Dann besitzt E keine abzählbare algebraische Basis.
Tipp: Satz von Baire.

(b) Es gibt keine Norm auf dem Raum der Polynome auf $[0,1]$, bezüglich der dieser Raum vollständig ist.

(c) Ein normierter Raum X ist separabel genau dann, wenn eine Folge (x_n) linear unabhängiger Elemente von X derart existiert, dass für jedes $x \in X$ und $\varepsilon > 0$ endlich viele Koeffizienten $\alpha_{n_1}, \ldots, \alpha_{n_K} \in \mathbb{R}$ existieren so, dass

$$\left\| x - \sum_{k=1}^{K} \alpha_{n_k} x_{n_k} \right\|_X < \varepsilon.$$