FREIBURGER FUNKTIONALIST

Definition. Eine Funktion $\Phi : [0,\infty) \to [0,\infty)$ heißt eine *Young-Funktion*, falls $\Phi(0) = 0$ gilt, Φ strikt wachsend und konvex ist, $\lim_{t\to 0+} \Phi(t)\,t^{-1} = 0$ und $\lim_{t\to\infty} \Phi(t)\,t^{-1} = \infty$. Die *mit* Φ *konjugierte Funktion* ist dann die Funktion

$$\Phi^*(t) := \sup_{s\geq 0}\ st - \Phi(s), \quad t \geq 0.$$

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ messbar. Man definiert die *Orlicz-Klasse* $\mathscr{L}^\Phi(\Omega)$ als das System aller messbaren Funktionen $f : \Omega \to \mathbb{R}$ mit

$$\int_\Omega \Phi(|f(x)|)\,\mathrm{d}x < \infty.$$

Aufgabe 13 **6 Punkte**

Sei $\Phi : [0,\infty) \to [0,\infty)$ eine Young-Funktion. Zeigen Sie das Folgende:

(a) Die konjugierte Funktion Φ^* ist wieder eine Young-Funktion.

(b) Falls eine Konstante $C > 0$ existiert so, dass $\Phi(2t) \leq C\Phi(t)$ für alle $t \geq 0$ gilt, dann ist $\mathscr{L}^\Phi$ ein linearer Raum.

Aufgabe 14 **5 Punkte**

Sei $\|\cdot\|$ eine Norm auf $C([0,1])$ mit den folgenden Eigenschaften:

(i) $\big(C([0,1]), \|\cdot\|\big)$ ist vollständig.

(ii) Aus $\lim_{n\to\infty} \|f_n\| = 0$ folgt $\lim_{n\to\infty} f_n(t) = 0$ für alle $t \in [0,1]$.

Zeigen Sie, dass $\|\cdot\|$ äquivalent zur der Standardnorm $\|\cdot\|_\infty$ von $C([0,1])$ ist.

Tipp: Wenden Sie den Satz vom abgeschlossenen Graphen auf die Identitätsabbildung zwischen den Räumen $(C([0,1]), \|\cdot\|)$ und $(C([0,1]), \|\cdot\|_\infty)$ an.

Definition. Sei $\mathbf{a} = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine reelle Folge und sei $p \in [1,\infty]$. Definiere

$$\|\mathbf{a}\|_p := \begin{cases} \left(\sum_{n\in\mathbb{N}} |a_n|^p\right)^{\frac{1}{p}}, & \text{falls } p \in [1,\infty); \\ \sup_{n\in\mathbb{N}} |a_n|, & \text{falls } p = \infty. \end{cases}$$

Der Raum ℓ^p besteht aus allen reellen Folgen $\mathbf{a}$ mit $\|\mathbf{a}\|_p < \infty$. Für alle $p \in [1,\infty]$ ist $(\ell^p, \|\cdot\|_p)$ ein Banachraum. Weiter bezeichnen wir mit c_0 den Raum aller zu Null konvergierenden reellen Folgen.

Aufgabe 15 **5 Punkte**

Zeigen Sie, dass $(\ell^1)^*$ isometrisch isomorph zu ℓ^∞ ist.

Aufgabe 16 **4 Punkte**

Im Sinne von Aufgabe 15 können wir $(\ell^1)^*$ mit ℓ^∞ identifizieren. Wegen $c_0 \subset \ell^\infty$ gilt dann $c_0 \subset (\ell^1)^*$. Bestimmen Sie

$$c_0{}^\perp = \{x \in \ell^1 \mid \langle f, x\rangle = 0 \text{ für alle } f \in c_0\},$$
$$c_0{}^{\perp\perp} = \{f \in (\ell^1)^* = \ell^\infty \mid \langle f, x\rangle = 0 \text{ für alle } x \in c_0{}^\perp\}.$$

Verifizieren Sie $c_0{}^{\perp\perp} \neq c_0$.