FREIBURGER FUNKTIONALIST

Aufgabe 17 **4 Punkte**

Sei $E := (C([0,1]), \|\cdot\|_\infty)$. Wir betrachten den Operator $A : D(A) \subset E \to E$ mit $D(A) := C^1([0,1])$ und $Au := u'$.

(a) Zeigen Sie $\overline{D(A)} = E$.

(b) Untersuchen Sie, ob A beschränkt und/oder abgeschlossen ist.

(c) Sei $B : D(B) \to E$ mit $D(B) := C^2([0,1]) \subset E$ und $Bu := u'$. Untersuchen Sie, ob B abgeschlossen ist.

Aufgabe 18 **5 Punkte**

Seien X, Y Banachräume, $T \in L(X,Y)$ und sei $A : D(A) \subset X \to Y$ ein dicht-definierter abgeschlossener linearer Operator. Wir definieren den Operator $B : D(A) \subset X \to Y$ durch $B = A + T$. Zeigen Sie das Folgende:

(a) B ist abgeschlossen.

(b) $D(A^*) = D(B^*)$.

(c) $B^* = A^* + T^*$.

Aufgabe 19 **6 Punkte**

Sei

$$D(A) := \Big\{ (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^1 \;\Big|\; \textstyle\sum_{n\in\mathbb{N}} n u_n < \infty \Big\}.$$

Definiere den Operator $A : D(A) \subset \ell^1 \to \ell^1$ durch

$$A\Big((u_n)_{n\in\mathbb{N}}\Big) := (n u_n)_{n\in\mathbb{N}}.$$

(a) Zeigen Sie, dass $\overline{D(A)} = \ell^1$ gilt und A abgeschlossen ist.
Tipp: Sie können zuerst zeigen, dass $\overline{c_{00}} = \ell^1$ gilt, wobei c_{00} reelle Folgen mit nur endlich vielen von Null verschiedenen Einträgen sind.

(b) Bestimmen Sie $D(A^*)$ und A^*.
Tipp: Hier und in (c) kann man die Darstellung des Raumes $(\ell^1)^*$ von Aufgabe 15 nutzen.

(c) Zeigen Sie $\overline{D(A^*)} \neq (\ell^1)^*$.

Aufgabe 20 **5 Punkte**

Sei $\Omega = (-1,1)$ und seien $f(x) = |x|$, $g(x) := \chi_{[0,1)}(x)$ für $x \in \Omega$.

(a) Berechnen Sie die schwache Ableitung der Funktion f auf Ω.

(b) Zeigen Sie, dass keine messbare Funktion $h : \Omega \to \mathbb{R}$ existiert so, dass $g' = h$, wobei g' die schwache Ableitung von g ist.
Tipp: Zeigen Sie, dass $h = 0$ f.ü. schon gelten müsste, was ein Widerspruch ist.

(c) Finden Sie ein Maß μ auf Ω so, dass $g' = \mu$ gilt, d.h. für alle $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ gilt

$$\int_{-1}^{1} g(x)\varphi'(x)\,\mathrm{d}x = -\int_{-1}^{1} \varphi(x)\,\mathrm{d}\mu.$$