FREIBURGER FUNKTIONALIST

Aufgabe 21 **5 Punkte**

(a) Seien $f_n, f \in C([0,1])$, $n \in \mathbb{N}$, so, dass $f_n \rightharpoonup f$. Zeigen Sie, dass f_n punktweise gegen f konvergiert.

(b) Sei X ein Banachraum und $K \subset X$ eine kompakte Untermenge (in der starken Topologie) und seien $x_n \in K$, $n \in \mathbb{N}$, und $x \in X$ so, dass $x_n \rightharpoonup x$. Zeigen Sie, dass schon $x_n \to x$ und $x \in K$ gilt.

Aufgabe 22 **6 Punkte**

Seien $\mathbf{b}^k, \mathbf{b} \in \ell^1$, $k \in \mathbb{N}$, so, dass $\mathbf{b}^k \rightharpoonup \mathbf{b}$ in ℓ^1. Zeigen Sie, dass schon $\mathbf{b}^k \to \mathbf{b}$ in ℓ^1 gilt. (Hier benutzt man die Notation $\mathbf{b} = (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$.)

Tipp: Setzen Sie voraus, dass die Aussage falsch ist. Dann können Sie einen Beweis durch Widerspruch in folgenden Schritten machen:

(a) Es existieren $\mathbf{a}^k$ mit $\|\mathbf{a}^k\|_1 = 1$, $k \in \mathbb{N}$, so, dass $\mathbf{a}^k \rightharpoonup 0$ gilt.

(b) Man findet eine Teilfolge $\mathbf{a}^{k_j}$ und disjunkte Mengen $M_j \subset \mathbb{N}$ so, dass für jedes $j \in \mathbb{N}$ gilt

$$\sum_{n\in M_j} |a_n^{k_j}| > \frac{1}{2} \quad \text{und} \quad \sum_{n\in \mathbb{N}\setminus M_j} |a_n^{k_j}| < \frac{1}{4}.$$

(c) Man konstruiert ein Funktional $\mathbf{u} \in \ell^\infty = (\ell^1)^*$ so, dass $\langle \mathbf{u}, \mathbf{a}^{k_j} \rangle > \frac{1}{4}$ für alle $j \in \mathbb{N}$ gilt.

Aufgabe 23 **4 Punkte**

Seien X, Y Banachräume, $T \in L(X,Y)$ und $x_n \in X$, $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie das Folgende:

(a) Wenn $x_n \rightharpoonup 0$ in X, dann $Tx_n \rightharpoonup 0$ in Y.

(b) Wenn T zusätzlich bijektiv ist und $Tx_n \rightharpoonup 0$ in Y, dann $x_n \rightharpoonup 0$ in X.

Aufgabe 24 **5 Punkte**

Sei X ein Banachraum und $x_n, x \in X$, $n \in \mathbb{N}$, so, dass $x_n \rightharpoonup x$ in X. Zeigen Sie, dass gilt

$$\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} x_j \rightharpoonup x, \quad \text{wenn } n \to \infty.$$