# FREIBURGER FUNKTIONALIST



## Aufgabe 25 — 5 Punkte

Sei $X$ ein Banachraum mit $\dim X = \infty$. Zeigen Sie das Folgende:

(a) Jede schwache (d.h. bezüglich $\tau(X, X^*)$) Umgebung der Null enthält einen nichttrivialen Vektorraum $W$.

**Tipp:** Zeigen Sie zuerst, dass $W = \bigcap_{j=1}^{n} \ker \varphi_j$ mit gewissen $\varphi_j \in X^*$, $j = 1, \dots, n$, gilt.

(b) Die schwache Topologie auf $X$ ist nicht normierbar.

**Tipp:** Wenn sie durch eine Norm $\|\cdot\|$ induziert wäre, dann wäre der Einheitsball (bezüglich $\|\cdot\|$) eine Umgebung der Null.

## Aufgabe 26 — 6 Punkte

Sei $X$ ein Banachraum mit $\dim X = \infty$. Mit $S_X$ bezeichnen wir die Einheitssphäre

$$S_X := \left\{ x \in X \,\middle|\, \|x\| = 1 \right\}.$$

Zeigen Sie das Folgende:

(a) Wenn $X^*$ separabel ist, existiert eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ der Elemente von $S_X$ so, dass $x_n \rightharpoonup 0$.

**Tipp:** Nutzen Sie, dass die schwache Topologie auf $B_X$ metrisierbar ist, wenn $X^*$ separabel ist.

(b) Es existiert ein abgeschlossener separabler Unterraum $X_0 \subset X$ mit $\dim X_0 = \infty$.

(c) Wenn $X$ reflexiv ist, existiert eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ der Elemente von $S_X$ so, dass $x_n \rightharpoonup 0$.

**Tipp:** Nutzen Sie, (b), (a) und Folgerung 4.13 aus dem Skript.

## Aufgabe 27 — 4 Punkte

Sei $X$ ein Banachraum.

(a) Seien $f_n \in X^*$, $n \in \mathbb{N}$, so, dass $\langle f_n, x \rangle$ für jedes $x \in X$ zu einer reellen Zahl konvergiert. Zeigen Sie, dass ein $f \in X^*$ existiert so, dass $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$.

(b) Sei $X$ zusätzlich reflexiv. Seien $x_n \in X$, $n \in \mathbb{N}$, so, dass $\langle f, x_n \rangle$ für jedes $f \in X^*$ zu einer reellen Zahl konvergiert. Zeigen Sie, dass ein $x \in X$ existiert so, dass $x_n \rightharpoonup x$.

## Aufgabe 28 — 5 Punkte

Sei $(X, \|\cdot\|_X)$ ein normierter Raum. Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

(i) Die Norm $\|\cdot\|_X$ ist strikt konvex.

(ii) Wenn $x, y \in B_X \setminus \{0\}$ und $\|x + y\|_X = \|x\|_X + \|y\|_X$ gilt, dann existiert ein $\lambda > 0$ so, dass $x = \lambda y$ ist.