FREIBURGER FUNKTIONALIST

Aufgabe 29 **10 Punkte**

Für jede reelle Folge $\mathbf{a} = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definieren wir die Norm

$$\|\mathbf{a}\| := \|\mathbf{a}\|_1 + \|\mathbf{a}\|_2 = \sum_{n\in\mathbb{N}} |a_n| + \left(\sum_{n\in\mathbb{N}} |a_n|^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Zeigen Sie das Folgende:

(a) Der Raum $(\ell^1, \|\cdot\|_1)$ ist nicht reflexiv.
Tipp: Satz von Eberlein-Šmuljan.

(b) Die Norm $\|\cdot\|$ ist strikt konvex.
Tipp: Zeigen Sie, dass $\|\cdot\|_2$ strikt konvex ist, und nutzen Sie dann Aufgabe 28.

(c) Die Norm $\|\cdot\|$ ist nicht gleichmäßig konvex.
Tipp: Sie können ein Gegenbeispiel konstruieren. Eine andere Möglichkeit ist zu zeigen, dass $\|\cdot\|$ äquivalent zu $\|\cdot\|_1$ ist und dass ein reflexiver Banachraum reflexiv bleibt, wenn seine Norm durch eine äquivalente Norm ersetzt wird, und dann richtig argumentieren.

Aufgabe 30 **10 Punkte**

Sei $(X, \|\cdot\|_X)$ ein gleichmäßig konvexer Banachraum und sei $C \subset X$ konvex, nicht leer und abgeschlossen. Zeigen Sie das Folgende:

(a) Zu jedem $x \in X$ gibt es genau ein Element $P_C x \in C$ so, dass gilt

$$\|P_C x - x\|_X = \inf_{y\in C} \|y - x\|_X.$$

(b) Jede Minimalfolge in C bezüglich x, d.h. eine Folge $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ der Elemente von C mit der Eigenschaft

$$\lim_{n\to\infty} \|y_n - x\|_X = \inf_{y\in C} \|y - x\|_X,$$

konvergiert stark gegen $P_C x$.

(c) Die Abbildung $P_C : X \to X$ ist stetig.
Tipp: Wenn $x_n \to x$ gilt, kann man die Ungleichung

$$\limsup_{n\to\infty} \|P_C x_n - x\|_X \le \inf_{y\in C} \|y - x\|_X$$

beweisen und dann (b) nutzen .