FREIBURGER FUNKTIONALIST

Aufgabe 31 **5 Punkte**

Sei X ein reflexiver Banachraum und sei $E \subset X^*$. Zeigen Sie, dass $E^\perp = \{0\}$ genau dann gilt, wenn $\overline{\operatorname{span} E} = X^*$ ist.

Aufgabe 32 **4 Punkte**

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ messbar. Sei $f \in L^p(\Omega) \cap L^q(\Omega)$ mit $p, q \in [1, \infty]$. Seien $r \in [p, q]$ und $\theta \in [0,1]$ so, dass $\frac{1}{r} = \frac{1-\theta}{p} + \frac{\theta}{q}$ gilt. (Hierbei wird die Konvention $1/\infty = 0$ verwendet.) Zeigen Sie, dass $f \in L^r(\Omega)$ ist und es gilt

$$\|f\|_r \leq \|f\|_p^{1-\theta} \|f\|_q^{\theta}.$$

Tipp: Nutzen Sie die Hölder-Ungleichung und $|f| = |f|^\theta |f|^{1-\theta}$.

Aufgabe 33 **5 Punkte**

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ messbar. Sei $1 \leq p < q < \infty$.

(a) Zeigen Sie, dass $L^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ dicht in $L^p(\Omega)$ ist.

(b) Zeigen Sie, dass die Menge

$$M := \Big\{ f \in L^p(\Omega) \cap L^q(\Omega) \;\Big|\; \|f\|_q \leq 1 \Big\}$$

abgeschlossen in $L^p(\Omega)$ ist.

Tipp: Man kann z.B. die Reflexivität des $L^q(\Omega)$ und den Satz von Eberlein-Šmuljan verwenden.

(c) Seien $f_n \in L^p(\Omega) \cap L^q(\Omega)$, $n \in \mathbb{N}$, und sei $f \in L^p(\Omega)$ so, dass

$$\|f_n - f\|_p \to 0 \quad \text{und} \quad \sup_{n\in\mathbb{N}} \|f_n\|_q < \infty$$

gilt. Sei $r \in [p, q]$. Zeigen Sie, dass $f \in L^r(\Omega)$ ist und $\|f_n - f\|_r \to 0$ gilt.

Tipp: Aufgabe 32.

Aufgabe 34 **6 + 3 Punkte**

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ messbar mit $|\Omega| < \infty$. Sei $1 \leq p < \infty$ und $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ (wieder mit $1/\infty = 0$). Seien $u_n, u \in L^p(\Omega)$, $n \in \mathbb{N}$, so, dass $u_n \rightharpoonup u$ in $L^p(\Omega)$ gilt. Weiterhin gelte $u_n \to v$ f.ü., wobei v eine messbare Funktion ist. Das Ziel dieser Aufgabe ist zu zeigen, dass $u = v$ f.ü. gilt.

(a) Zeigen Sie, dass $v \in L^p(\Omega)$ ist.

Tipp: Lemma von Fatou.

(b) Für $k \in \mathbb{N}$ definieren wir

$$E_k := \Big\{ x \in \Omega \;\Big|\; \sup_{n\geq k} |u_n(x)| \geq k \Big\}.$$

Zeigen Sie, dass $\lim_{k\to\infty} |E_k| = 0$ gilt.

(c) Sei $k \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass für jede Funktion $w \in L^{p'}(\Omega)$ gilt

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega (u_n - v)\, w\, \chi_{\Omega \setminus E_k} \, dx = 0.$$

Tipp: Satz von Lebesgue über dominierte Konvergenz.

(d) Folgern Sie, dass $u = v$ f.ü. gilt.

Es gibt **3 Zusatzpunkte** für eine Lösung der Aufgabe ohne der Voraussetzung $|\Omega| < \infty$. (Abschnitt (c) darf in dem Fall modifiziert werden.)