Funktionalanalysis

Sommersemester 2023

Prof. Dr. Michael Růžička

Version: 18.7.2023

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Einführung und Begriffe

1.1 Einführung

Die Funktionalanalysis beschäftigt sich mit *unendlich-dimensionalen* Vektorräumen, in denen ein *Konvergenzbegriff* (Topologie) gegeben ist, sowie den Abbildungen zwischen ihnen. Besonders angestrebt sind Ergebnisse, die sich auf konkrete Funktionenräume (z.B. $C[a, b], L^2(\Omega)$ etc.) und konkrete Gleichungen (z.B. Integralgleichungen oder partielle Differentialgleichungen) anwenden lassen.

Die Betrachtungsweise der Funktionalanalysis, Funktionen als Punkte in einem unendlich-dimensionalen Raum aufzufassen und so geometrische Überlegungen u.ä. anzuwenden, hat sich als sehr fruchtbar erwiesen und zu einer enormen Bereicherung der Analysis geführt. Die Sätze der Funktionalanalysis zeichnen sich durch ihre Allgemeinheit (bez. der Raumdimension) aus und führen zu einem tieferen Verständnis zahlreicher Zusammenhänge.

Die Funktionalanalysis ist ein Produkt des 20. Jahrhunderts. Der Name kommt von dem Wort „Funktional". Ein *lineares Funktional* ist eine lineare Abbildung eines Vektorraumes in seinen Grundkörper. Ist dieser Vektorraum selbst ein Funktionenraum, so sind die Argumente des Funktionals Funktionen. Um nicht von einer Funktion von Funktionen zu sprechen, verwendeten die damaligen Mathematiker das Wort „Funktional". (Heute würde man sich daran wohl weniger stören.) Da in den Anwendungen der Funktionalanalysis viel mit solchen Abbildungen - also Funktionen von Funktionen, letztere aufgefaßt als Punkte eines Vektorraumes - gearbeitet wird, erklärt sich auf diese Weise der Name „Funktionalanalysis".

Ein Teilgebiet der Funktionalanalysis ist die *lineare Funktionalanalysis*, woraus die Themenbereiche der Vorlesung entnommen sind. Sie befaßt sich unter anderem mit der Lösbarkeit von *linearen Gleichungen* $Au = f$, wobei hier A von einem Funktionenraum linear in einen anderen abbildet. Man betrachte z. B. die Gleichung

$$-\Delta u = f.$$

Hier ist der Laplaceoperator $(-\Delta)$ dann eine Lineare Abbildung welche von $C^2(\mathbb{R}^n) \to C(\mathbb{R}^n)$ abbilden würde.
Der linearen Funktionalananlysis steht die *nichtlineare Funktionalanalysis* gegenüber. Diese befasst sich beispielsweise mit Fixpunktsätzen welche es dann ermöglichen die (nicht immer eindeutige) Lösbarkeit *nichtlinearer Gleichungen* $A(u) = f$ zu zeigen.

Eine zentrale Idee der Funktionalanalysis ist die Verallgemeinerung bekannter Ergebnisse aus dem endlichdimensionalen auf den unendlichdimensionalen Fall zu übertragen. Hierbei ist allerdings größte Vorsicht geboten, wie die folgenden im $\mathbb{R}^n$ ungewohnten Effekte zeigen sollen:
Im $\mathbb{R}^n$ ist jede surjektive lineare Abbildung auch injektiv (und umgekehrt). Im unendlichen ist beides falsch:

a) Surjektive lineare Abbildungen können einen nichttrivialen Kern haben.

Beispiel: Sei

$$V = \{ (c_j)_{j\in\mathbb{N}} \,\big|\, c_j \in \mathbb{R} \}$$

der unendlich-dimensionale Vektorraum der reellen Folgen. Hier ist die komponentenweisen Addition die additive Verknüpfung und die komponentenweise Multiplikation mit Skalaren $\alpha \in \mathbb{R}$ die Skalarmultiplikation. (Man könnte $V = \mathbb{R}^\infty$ oder besser $\mathbb{R}^\omega$ schreiben.) Die lineare Abbildung $A : V \to V$ sei für $c = (c_j)_{j\in\mathbb{N}}$ definiert durch

$$Ac = (c_2, c_3, c_4, \ldots).$$

Offensichtlich ist $A(V) = V$, aber $A(c_1, 0, 0, \ldots) = (0, 0, \ldots)$.

b) Ist der Kern $N(A)$ einer linearen Abbildung trivial, so ist A nicht notwendig surjektiv.

Beispiel: V sei wieder wie oben definiert. Sei $Ac = (0, c_1, c_2, c_3, \ldots)$. Aus $Ac = 0$ folgt $c = 0$, also $N(A) = 0$. Offensichtlich ist aber $A(V)$ ein echter Teilraum von V.

c) Lineare Abbildungen - selbst einfachster Art - müssen keinen Eigenwert haben.

Beispiel: Sei $C([a, b])$ der Vektorraum der $\mathbb{R}$-wertigen stetigen Funktionen auf $[a, b]$ (mit der componentenweisen Addition und Skalarmultiplikation). Sei $A : C([a, b]) \to C([a, b])$ definiert durch

$$(Af)(x) = (\sin x) f(x)$$

A ist ein sehr einfacher und häufig auftretender linearer Operator, nämlich ein **Multiplikationsoperator** - die Multiplikation mit $\sin x$.

Trotzdem hat A *keinen* Eigenwert. Andernfalls gäbe es ein $f \in C[a,b], f \not\equiv 0$ (d.h. f ist nicht die Null-Funktion) und ein $\lambda \in \mathbb{R}$ (oder $\mathbb{C}$) mit $(\sin x) f(x) = \lambda f(x)$. Wenn aber $f \not\equiv 0$, so existiert ein $x_0 \in [a,b]$ mit $f(x) \neq 0$ für $x \in U(x_0)$. Dort könnten wir durch $f(x)$ teilen und erhielten

$$\sin x = \lambda = \text{const}\,, \text{ für alle } x \in U(x_0)\,.$$

Dies ist nicht möglich, da die Sinusfunktion auf keiner offenen Menge konstant ist. Also hat A keinen Eigenwert.

Man bemüht sich in der Funktionalanalysis, durch Zusatzbedingungen an A die im $\mathbb{R}^n$ bekannten Sätze zu retten. Im Falle der "Eigenwertproblematik" gibt man Klassen von linearen Operatoren (= Abbildungen) an, für die das Eigenwertproblem ähnlich wie bei $n \times n$-Matrizen behandelt werden kann. Außerdem werden verschiedene Abschwächungen des Begriffs „Eigenwert“ eingeführt, um eine Analogie zu $n \times n$-Matrizen zu bekommen. Zudem sind diese Abschwächungen durch die Quantenphysik motiviert. Hiermit beschäftigt sich die „Spektraltheorie“, welche wir im Abschnitt 2.8 besprechen werden.

Es hat sich herausgestellt, daß die meisten Funktionenräume mit welchen man Analysis betreiben möchte eine **Norm** oder zumindest eine **Metrik** besitzen. Bekannte Beispiele sind:

$$C([a,b], ||\cdot||_\infty),\; L^2([a,b], ||\cdot||_{L^2([a,b])}).$$

Vektorräume mit einer Norm heißen **normierte Vektorräume**. Eine Norm impliziert immer eine Metrik und eine Metrik impliziert immer einen Konvergenzbegriff (eine Topologie). In Funktionenräumen gibt es jedoch weitere Konvergenzbegriffe, wie das nächste Beispiel zeigt:

d) In unendlichdimensionalen Räumen gibt es häufig mehrere natürliche Konvergenzbegriffe.

Im $\mathbb{R}^n$ gibt es außer der euklidischen Norm noch beliebig viele andere Normen - diese sind aber alle äquivalent und induzieren somit denselben Konvergenzbegriff. In unendlichdimensionalen Räumen ist dies anders.
Beispiel: Wir betrachten den Vektorraum

$$V = \ell^2 := \{\, (c_j)_{j\in\mathbb{N}} \mid \sum_{j=1}^{\infty} |c_j|^2 < \infty \,\}\,.$$

Durch $\|c\|_{\ell^2} = (\sum\limits_{k=1}^{\infty} |c_k|^2)^{1/2}$ ist auf V einen Norm gegeben.

Hier hat man zunächst die **Konvergenz in der Norm** auch die **starke** ℓ^2-Konvergenz genannt:

$$c^j \to c \text{ in } \ell^2 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \|c^j - c\|_{\ell^2} \to 0 \ \text{ für } j \to \infty\,.$$

Zusätzlich hat man die **punktweise Konvergenz**:

$$c^j \to c \text{ punktweise} \qquad \Longleftrightarrow \qquad c_i^j \stackrel{j\to\infty}{\longrightarrow} c_i \ \text{ für alle } i \in \mathbb{N}\,.$$

Diese **punktweise Konvergenz** oder auch **komponentenweise Konvergenz** hängt nur von der Norm des Grundkörpers ab; also in unserem Falle dem Betrag in $\mathbb{R}$. Im $\mathbb{R}^n$ sind die letzten beiden Konvergenzen äquivalent. Im unendlichem nicht; die Folge $c^j = (0, ..., 0, \underset{\text{j-te Stelle}}{j}, 0, ...)$ geht punktweise gegen $(0, 0, ...)$ jedoch ist $||c^j||_{\ell^2} = j \to \infty$.

Die dritte wichtige natürliche Konvergenz ist die **schwache Konvergenz**, die wir später kennen lernen werden.

Wir haben also **Vektorräume** auf welchen mehrere Konvergenzbegriffe existieren. Daraus ergibt sich die Frage, wie diese Begriffe zusammenhängen. Tatsächlich besteht die Grundlage der Funktionalanalysis in der Untersuchung der Verträglichkeit von Vektorraumstruktur mit der Konvergenzstruktur (d.h. Norm, Metrik, Topologie). Wie empfindlich dieses Verhältnis ist zeigt das nächste wichtige Beispiel:

e) Lineare Abbildungen sind nicht notwendig stetig.

Sei V der Vektorraum der Polynome auf $[-2, 2]$, versehen mit der **gleichmäßigen Konvergenz** als Konvergenzbegriff, d.h.

$$p^j \to p \qquad \Longleftrightarrow \qquad \|p^j - p\|_\infty \to 0 \text{ für } j \to \infty.$$

Hierbei ist

$$\|q\|_\infty = \max_{x\in[-2,2]} |p(x)|.$$

Wir definieren die lineare Abbildung $A : V \to V$, indem wir sie auf den Basiselementen x^n definieren:

$$Ax^n = 3^n x^n\,.$$

Mit $p^n(x) = \frac{1}{(2{,}5)^n} x^n$ gilt $p^n \to 0$ $(n \to \infty)$, aber

$$\|Ap^n(x)\|_\infty = \frac{3^n \cdot 2^n}{(2, 5)^n} \to \infty\,.$$

Schließlich betonen wir noch, dass man auch das konkrete Studium einzelner Funktionenräume zur Funktionalanalysis zählen kann. Es gibt zahllose Funktionenräume in der Analysis welche besondere Beachtung verdienen. Der Anfänger kennt vermutlich die Räume $C[a,b]$, $C^1(\Omega)$, $C^m(\Omega)$, $C^\infty(\Omega)$, $C^{0,\alpha}(\Omega)$, $L^2(\Omega)$, $L^p(\Omega)$. Man benötigt diese vielen Funktionenräume und deren besondere Eigenschaften unter anderem, um (allgemeine) Sätze der Funktionalanalysis einer konkreten Situation anzupassen.

1.2 Normierte Vektorräume

2.1 Definition. *Ein Vektorraum V über $\mathbb{R}$ bzw. $\mathbb{C}$, heißt* ***normiert****, wenn es eine Abbildung $\|\cdot\| : V \to \mathbb{R}$ gibt, die* ***Norm****, so dass für alle $x, y \in V$ und alle $\lambda \in \mathbb{R}$ bzw. $\mathbb{C}$ gilt:*

(N1) ***Positiv definit****, d.h. $\|x\| \geq 0$ und $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$.*

(N2) ***Positiv homogen****, d.h. $\|\lambda x\| = |\lambda|\|x\|$.*

(N3) ***Dreiecksungleichung****, d.h. $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$.*

Man schreibt $(V, \|\cdot\|)$ um den normierten Vektorraum V mit Norm $\|\cdot\|$ zu notieren.

Wenn aus dem Zusammenhang klar ist, um welche Norm es sich handelt schreibt man oft nur V statt $(V, \|\cdot\|)$. Wir werden uns meistens auf Vektorräume über $\mathbb{R}$ beschränken, und geben deshalb explizit an, wenn dies nicht der Fall ist.

Beispiele:

(i) Für den euklidischen Vektorraum $\mathbb{R}^n$ sind durch

$$\begin{aligned} \|x\|_2 &:= \Big(\sum_{i=0}^n |x_i|^2 \Big)^{\frac{1}{2}}, \\ \|x\|_p &:= \Big(\sum_{i=0}^n |x_i|^p \Big)^{\frac{1}{p}}, \qquad 1 \leq p < \infty, \\ \|x\|_\infty &:= \max_{i=1,\dots,n} |x_i|, \end{aligned}$$

wobei $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, Normen definiert.

(ii) Die Lebesgue-Räume $L^p(\Omega)$. Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ eine Lebesgue-messbare Menge. Wir bezeichnen mit $L^p(\Omega)$, $1 \le p < \infty$, den Vektorraum aller (Äquivalenzklassen) Lebesgue–messbarer Funktionen $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$ mit

$$\int\limits_\Omega |f(x)|^p \, dx < \infty\,.$$

Mit $L^\infty(\Omega)$ bezeichnen wir den Vektorraum aller (Äquivalenzklassen) Lebesgue–messbarer Funktionen $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$ für die eine Konstante $K > 0$ existiert, so dass für fast alle $x \in \Omega$ gilt:

$$|f(x)| \le K\,.$$

Mit den Normen

$$\begin{aligned} \|f\|_p &:= \Big(\int\limits_\Omega |f(x)|^p \, dx\Big)^{\frac{1}{p}}, && 1 \le p < \infty\,,\\ \|f\|_\infty &:= \operatorname*{ess\,sup}_{x\in\Omega} |f(x)|\,, && p = \infty\,, \end{aligned}$$

wird $(L^p(\Omega), \|\cdot\|_p)$, $1 \le p \le \infty$, zu einem normierten Vektorraum.

Mit Hilfe der Norm kann man einen Konvergenzbegriff definieren und somit einen Vollständigkeitsbegriff:

2.2 Definition. *Sei $(V, \|\cdot\|)$ ein normierter Vektorraum.*

(i) *Eine Folge $(x_n) \subseteq V$* ***konvergiert (stark oder auch in der Norm)*** *gegen $x \in V$ genau dann, wenn $\|x_n - x\| \to 0$ für $n \to \infty$. Man schreibt $x_n \to x$ $(n \to \infty)$.*

(ii) *Die Folge $(x_n) \subseteq V$ heißt* ***Cauchyfolge*** *wenn für alle $\varepsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ existiert, so dass für alle $n, k \ge n_0$ gilt : $\|x_n - x_k\| \le \varepsilon$.*

2.3 Definition. *Ein normierter Vektorraum V heißt* ***vollständig*** *genau dann, wenn jede Cauchyfolge einen Grenzwert (in V) besitzt. Ein vollständiger normierter Vektorraum heißt* ***Banachraum*** *(B-Raum).*

Beispiele:

(i) $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_p)$, $1 \le p \le \infty$, ist ein vollständiger normierter Vektorraum. Man beachte, dass alle Normen im $\mathbb{R}^n$ äquivalent sind.

(ii) $(L^p(\Omega), \|\cdot\|_p)$. In Analysis III wird gezeigt (Satz von Fischer–Riesz), dass diese Räume vollständig sind. Die L^p-Normen sind natürlich nicht äquivalent und deswegen unterscheiden sich auch die Räume.

(iii) Der Raum der stetigen Funktionen. Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet, d.h. Ω ist offen und zusammenhängend. Mit $C(\overline{\Omega})$ bezeichnen wir die Menge aller beschränkten und gleichmäßig stetigen Funktionen $f\colon \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$. Der Raum $(C(\overline{\Omega}), \|\cdot\|_\infty)$ ist auch ein vollständiger normierter Vektorraum. Dazu beachte man, dass für stetige Funktionen $\|f\|_\infty = \sup_{x\in\overline{\Omega}} |f(x)|$ gilt. Somit impliziert $||\cdot||_\infty$ die gleichmässige Konvergenz von stetigen Funktionen. Aus Analysis II wissen wir, dass jede Folge von stetigen Funktionen welche gleichmässig konvergiert, eine stetige Grenzfunktion hat; d.h. der Grenzwert liegt wieder in $C(\overline{\Omega})$.

(iv) Der Raum $(C(\overline{\Omega}), ||\cdot||_p)$, wobei Ω ein beschränktes Gebiet ist, ist ein normierten Raum, der nicht vollständig ist.

Eine wichtige Rolle in der Funktionalanalysis spielt die Zusammenführung von Vektorraumstruktur und Normstruktur, welches gerade die beiden Qualitäten eines normierten Vektorraums (bzw. Banachraumes) sind. Die kanonischen (strukturerhaltenden) Abbildungen für normierte Vektorräume sind die stetigen linearen Abbildungen:

2.4 Definition. *Beliebige Abbildungen eines normierten Vektorraumes in einen anderen normierten Vektorraum werden **Operatoren** genannt. Seien X, Y normierte Vektorräume und $A : X \to Y$ ein Operator. Dann heißt der Operator A:*

(i) ***Linear**, wenn für alle $x, y \in X$ und alle $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ bzw. $\mathbb{C}$ gilt:*

$$A(\alpha x + \beta y) = \alpha Ax + \beta Ay.$$

(ii) ***Beschränkt**, wenn A beschränkte Mengen in X in beschränkte Mengen in Y abbildet.*

(iii) ***Stetig in** x_0, wenn für alle $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, so dass für alle $x \in X$ mit $\|x - x_0\|_X < \delta$ folgt, dass $\|Ax - Ax_0\|_Y < \varepsilon$.*

(iv) ***Stetig**, wenn A stetig in allen $x_0 \in X$ ist.*

Linearität ist eine starke Eigenschaft. Im endlichdimensionalen ist jede lineare Funktion automatisch sofort auch (global Lipschitz-) stetig und beschränkt. Im unendlichdimensionalen ist die Stetigkeit zwar nicht automatisch gegeben, jedoch kann man sie vermeidlich schwächer charakterisieren; sie folgt zum Beispiel schon aus der Stetigkeit in nur einem Punkt!

2.5 Satz. *Seien X, Y normierte Vektorräume und $A : X \to Y$ ein linearer Operator, dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

(i) *A ist stetig,*

(ii) *A ist stetig in 0,*

(iii) $\sup_{||x||_X \le 1} ||Ax||_Y < \infty$,

(iv) *A ist beschränkt.*

BEWEIS : Übung. ■

Der Raum der beschränkten, linearen Operatoren $A : X \to Y$ ist offensichtlich wieder ein Vektorraum; er wird mit $L(X, Y)$ bezeichnet. Er ist sogar ein normierter Vektorraum, denn durch

$$\|A\| := \sup_{\|x\|_X \le 1} \|Ax\|_Y \tag{2.6}$$

ist auf $L(X, Y)$ eine Norm gegeben, die **Operatornorm**, wie wir gleich beweisen werden:

2.7 Lemma. *Seien X, Y normierte Vektorräume.*

(i) *Der Raum $(L(X, Y), \|\cdot\|)$ ist ein normierter Vektorraum.*

(ii) *Ist Y ein Banachraum, so ist auch $(L(X, Y), \|\cdot\|)$ ein Banachraum.*

BEWEIS : Zu (i): Für $A, B \in L(X, Y)$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ bzw. $\mathbb{C}$ gilt:

$$\|(A + B)x\|_Y \le \|Ax\|_Y + \|Bx\|_Y,$$
$$\|\lambda Ax\|_Y = |\lambda| \, \|Ax\|_Y \,,$$

woraus die Normaxiome (N2) und (N3) folgen. Wenn nun $\|A\| = 0$ so ist $A \equiv 0$, denn wenn $Ax \neq 0$ so ist wegen der Linearität $||A\frac{x}{||x||_X}||_Y > 0$. Damit haben wir die drei Normaxiome aus Definition 2.1 gezeigt. $L(X, Y)$ ist also ein normierter Vektorraum.

Zu (ii): Sei $(A_k) \subseteq L(X, Y)$ eine Cauchyfolge von Operatoren, d.h. für alle $\varepsilon > 0$ existiert ein n_0, so dass für alle $n, k \ge n_0$ gilt, $\|A_k - A_n\| < \varepsilon$. Für $x \in X$ ist (A_kx) eine Folge in Y und es gilt:

$$\|A_kx - A_nx\|_Y = \|(A_k - A_n)(x)\|_Y \le \|A_k - A_n\|\|x\|_X < \varepsilon\|x\|_X.$$

Daraus folgt, dass (A_kx) eine Cauchyfolge in Y ist. Da Y ein Banachraum ist existiert $\lim\limits_{k\to\infty} A_kx =: Ax$. Dieser punktweise definierte Grenzoperator ist eine lineare Abbildung von X nach Y, da alle A_k linear sind. Es bleibt zu zeigen, dass A auch beschränkt ist: Für $x \in X$ und $\varepsilon > 0$ beliebig gilt

$$\|(A-A_n)(x)\|_Y = \lim_{k\to\infty} \|(A_k-A_n)(x)\|_Y \leq \lim_{k\to\infty} \|A_k-A_n\| \|x\|_X < \varepsilon\|x\|_X < \infty,$$

falls $n \geq n_0$. Daraus folgt, dass $A - A_n \in L(X,Y)$ ist und damit ist auch $A = (A - A_n) + A_n$ ein Element aus $L(X,Y)$. Des Weiteren gilt $A_n \to A$ $(n \to \infty)$ in $L(X,Y)$, denn

$$\begin{aligned} \|A - A_n\| &= \sup_{\|x\|_X\leq 1} \lim_{k\to\infty} \|(A_k - A_n)(x)\|_Y \\ &\leq \sup_{\|x\|_X\leq 1} \lim_{k\to\infty} \|A_k - A_n\| \|x\|_X \leq \varepsilon \sup_{\|x\|_X\leq 1} \|x\|_X \leq \varepsilon \end{aligned}$$

für alle $n \geq n_0$. Dies impliziert $\|A - A_n\| \to 0$ für $n \to \infty$, d.h. $A_n \to A$ in $L(X,Y)$. ∎

2.8 Definition. *Sei X ein normierter Vektorraum über $\mathbb{R}$ bzw. $\mathbb{C}$. Der Raum $L(X,\mathbb{R})$ bzw. $L(X,\mathbb{C})$ der beschränkten, linearen Funktionale heißt* ***Dualraum*** *von X und wird als X^* bezeichnet. Für $f \in X^*, x \in X$ schreibt man*

$$\langle f, x\rangle_{X^*,X} = \langle f, x\rangle_X = \langle f, x\rangle := f(x)$$

und nennt $\langle \cdot, \cdot\rangle_{X^*,X}$ das ***Dualitätsprodukt*** *zwischen X und X^*.*

Da $\mathbb{R}$ bzw. $\mathbb{C}$ Banachräume sind, ist auch X^* nach Lemma 2.7 immer ein Banachraum.

1.3 Metrische und topologische Räume

Im weiteren beschäftigen wir uns mit topologischen Eigenschaften. Wie man am Beispiel d) aus der Einführung sieht gibt es verschiedene "Konvergenzen". *Konvergenz* ist eine *topologische Eigenschaft*, weshalb wir uns etwas mit Topologie an dieser Stelle beschäftigen. Die zwei weiteren zentralen topologischen Eigenschaften welche wir in der Analysis benötigen sind *Stetigkeit* und *Kompaktheit*. Zuerst wiederholen wir den Begriff des metrischen Raumes.

3.1 Definition. *Ein* ***metrischer Raum*** *ist eine Menge M versehen mit einer Abstandsfunktion $d : M \times M \to \mathbb{R}$, der Metrik, welche für alle $x, y, z \in M$ folgende Eigenschaften besitzt:*

(M1) ***Positiv definit****, d.h. $d(x,y) \geq 0$ und es gilt $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$.*

(M2) ***Symmetrisch****, d.h. $d(x,y) = d(y,x)$.*

(M3) ***Dreiecksungleichung****, d.h. $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$.*

Beispiele:

(i) $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_p)$ mit der von der Norm induzierten Metrik $d(x,y) = \|x-y\|_p$.

(ii) Jeder normierte Vektorraum $(X, ||\cdot||)$ mit $d(x,y) = ||x-y||$.

(iii) Die diskrete Metrik, auf einer beliebigen Menge, mit $d(x,y) = 1$ für $x \neq y$ und $d(x,x) = 0$.

Eine Metrik ist die schwächste Form eines Abstandbegriffes. Deshalb kann man die Begriffe "konvergente Folge", "Cauchyfolge" und "Vollständigkeit" analog zu normierten Vektorräumen definieren. Sei (x_n) eine Folge eines metrischen Raumes (M,d). Sie **konvergiert** gegen x genau dann, wenn $d(x_n, x) \to 0$ für $n \to \infty$. Sie heißt **Cauchyfolge** wenn für alle $\varepsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ existiert, sodass für alle $n, k \geq n_0$ gilt: $d(x_n, x_k) \leq \varepsilon$. Ein metrischer Raum heißt **vollständig**, wenn jede Cauchyfolge einen Grenzwert besitzt.

In metrischen Räumen kann man auch definieren was offene Mengen sind.

3.2 Definition. *Sei (M,d) ein metrischer Raum. Die Menge*

$$B_r(x) := \{y \in M \mid d(x,y) < r\}$$

*heißt **offener Ball um** x **mit Radius** r. Eine Menge $O \subseteq M$ heißt **offen**, wenn für alle $x \in O$ ein $r_x > 0$ existiert, so dass $B_{r_x}(x) \subseteq O$.*

3.3 Lemma. *In einem metrischer Raum (M,d), hat das System der offenen Mengen folgende Eigenschaften:*

(T1) *M und $\emptyset$ sind offen.*

(T2) *Beliebige Vereinigungen von offenen Mengen sind offen.*

(T3) *Endliche Durchschnitte von offenen Mengen sind offen.*

Beweis : (T1) und (T2) sind trivial. Zu (T3): Sei $x \in \bigcap_{i=1}^n O_i$ so existiert für alle O_i ein $r_i > 0$, so dass $B_{r_i}(x) \subseteq O_i$. Damit gilt für $r = \min_i r_i$, dass $B_r(x) \subseteq \bigcap_{i=1}^n O_i$. ∎

Diese Eigenschaften der offenen Mengen in metrischen Räumen motivieren den Begriff des allgemeinen topologischen Raumes:

3.4 Definition. *Sei X eine Menge und τ ein System von Teilmengen von X (d.h. $\tau \subseteq 2^X$). Falls τ die Axiome (T1) – (T3) erfüllt, so heißt τ **Topologie** auf X. Das Paar (X,τ) bezeichnen wir als **topologischen Raum**. Ein topologischer Raum (X,τ) heißt **Hausdorffraum**, wenn für alle $x, y \in X$, $x \neq y$, Elemente $U, V \in \tau$ existieren, so dass $x \in U$, $y \in V$ und $U \cap V = \emptyset$.*

Die Elemente aus τ heißen **offene** Mengen. Eine Menge $A \subseteq X$ heißt **abgeschlossen** genau dann, wenn $X \setminus A$ offen ist, d.h. $X \setminus A \in \tau$. Das System der offenen Mengen in metrischen Räumen, nennen wir die **von der Metrik induzierte Topologie**. Eine von einer Metrik induzierte Topologie hat immer die Hausdorffeigenschaft.

Beispiele:

(i) (M, d) metrischer Raum mit $\tau :=$ System aller offenen Mengen ist Hausdorff.

(ii) $(\mathbb{R}, |\cdot|)$, wobei $\tau :=$ System aller offenen Mengen; dies ist ein Spezialfall von (i).

(iii) $(X, \{\emptyset, X\})$, die chaotische Topologie (keine Metrik und nicht Hausdorff!!).

(iv) $(X, 2^X)$, die diskrete Topologie (induziert von der diskreten Metrik, also Hausdorff).

Im Folgenden zeigen wir, dass Konvergenz, Stetigkeit und Kompaktheit mit offenen Mengen alleine definiert werden können. Wir vereinbaren außerdem, dass im Weiteren **alle** topologischen Räume Hausdorff-Räume sind!
Um Konvergenz in topologischen Räumen zu verstehen, bietet es sich an den Begriff der Umgebung zu definieren:

3.5 Definition. *Sei (X, τ) ein topologischer Raum.*

(i) *$V \subseteq X$ heißt* ***Umgebung*** *von $x \in V$, wenn ein $U \in \tau$ existiert, so dass $x \in U \subseteq V$.*

(ii) *Das* ***System der Umgebungen um*** *x wird mit $V(x)$ bezeichnet.*

(iii) *Eine* ***Umgebungsbasis*** *eines Punktes $x \in X$ ist ein System $(V_i)_{i \in I}$ von Umgebungen von x, so dass für beliebige Umgebungen $V \in V(x)$ ein $i \in I$ existiert, so dass $V_i \subseteq V$ ist.*

Nun kann man ganz kanonisch die Konvergenz definieren:

3.6 Definition. *Sei (X, τ) ein topologischer Raum. Eine Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq X$* ***konvergiert*** *gegen $x \in X$, wenn für alle Umgebungen V von x ein $n_0 \in \mathbb{N}$ existiert, so dass $(x_n)_{n > n_0} \subseteq V$.*

Wichtig: In Hausdorffräumen konvergiert jede Folge gegen höchstens einen Grenzwert; wegen der Trennungseigenschaft.

Beispiel: Im Falle des metrischen Raumes gibt es für alle $x \in M$ eine abzählbare Umgebungsbasis, nämlich die Bälle $\{B_{(1/n)}(x) \mid n \in \mathbb{N}\}$. Damit ergibt sich, dass der topologische Konvergenzbegriff (von Folgen) mit dem metrischen Konvergenzbegriff übereinstimmt.

Über den Umgebungsbegriff ist es möglich Inneres, Äußeres und den Rand zu definieren:

3.7 Definition. *Sei (X, τ) ein topologischer Raum, und $M \subseteq X$.*

(i) *Ein Punkt $x \in M$ heißt* ***innerer Punkt*** *von $M \subseteq X$, wenn ein $V \in V(x)$ existiert, so dass $V \subseteq M$.*

(ii) *Ein Punkt $x \in X$ ist* ***Randpunkt*** *von $M \subseteq X$, wenn für alle $V \in V(x)$, $V \cap M \neq \emptyset$ und $V \cap (X \backslash M) \neq \emptyset$ gilt.*

(iii) *Der* ***Rand*** *∂M von M ist definiert als*

$$\partial M := \{x \in X \mid x \text{ ist Randpunkt von } M\}.$$

(iv) *Das* ***Innere*** *ist definiert als*

$$int(M) = M^\circ := \{x \in M \mid x \text{ ist innerer Punkt von } M \ .$$

(v) *Der* ***Abschluss*** *ist definiert als*

$$\overline{M} := M \bigcup \partial M = \operatorname{int}(M) \dot{\bigcup} \partial M.$$

3.8 Lemma. *Sei (X, τ) ein topologischer Raum.*

(i) *Eine Menge ist offen genau dann, wenn sie Umgebung all ihrer Punkte ist.*

(ii) *Der Abschluss einer Menge ist abgeschlossen.*

(iii) *Das Innere einer Menge ist offen.*

(iv) *Wenn $A \subseteq X$ abgeschlossen ist, so gilt für alle $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq A$ mit $x_n \to x$, dass $x \in A$.*

(v) *In Räumen in denen jeder Punkt eine abzählbare Umgebungsbasis besitzt (z.B. in metrischen Räumen) gilt auch die Rückrichtung von (iv).*

Beweis : Übung ∎

Die zentrale Verbindung zwischen Abschluss und Konvergenz wird uns oft nützlich sein. Unter anderem durch dichte Teilmengen:

3.9 Definition. *Sei (X, τ) ein topologischer Raum. Eine Menge $N \subset M$ heißt* ***dicht*** *in M, wenn $\overline{N} = M$. Der Raum (X, τ) heißt* ***separabel****, wenn es eine dichte abzählbare Menge in X gibt.*

Beispiele:

(i) $\mathbb{R}^n$ ist separabel, da $\overline{\mathbb{Q}^n} = \mathbb{R}^n$.

(ii) $C_0^\infty(\Omega)$ ist dicht in $L^2(\Omega)$, da für alle $f \in L^2(\Omega)$ eine Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq C_0^\infty(\Omega)$ existiert, so dass $f_n \to f$ in $L^2(\Omega)$ (Analysis III, Satz 9.17). Damit folgt nach Lemma 3.8, dass $\overline{C_0^\infty(\Omega)}^{L^2} = L^2(\Omega)$. Nach dem Satz von Weierstraß kann jede stetige Funktion beliebig genau durch Polynome mit rationalen Koeffizienten approximiert werden. Also ist $L^2(\Omega)$ separabel.

Durch Lemma 3.8 wird deutlich welch zentraler topologischer Begriff die Umgebung ist. Daher ist es nicht verwunderlich, dass sich eine Topologie auch über **Umgebungssysteme** definieren lässt.

3.10 Definition. *Wenn ein System von Mengen $V(x) \subseteq 2^X$, $x \in X$, die Eigenschaften*

(U1) *Für alle $V \in V(x)$ gilt $x \in V$.*

(U2) *Ist $V \in V(x)$ und $M \supseteq V$, so ist auch $M \in V(x)$.*

(U3) *Sind $V_1, V_2 \in V(x)$, so ist auch $V_1 \cap V_2 \in V(x)$.*

(U4) *Für alle $V \in V(x)$ gibt es ein $W \in V(x)$, so dass für alle $y \in W$ auch $V \in V(y)$ ist.*

besitzt, dann heißt $V(x)$ ein **Umgebungssystem** *um x.*

3.11 Lemma. *Sei M eine Menge.*

(i) *Ist τ eine Toplogie auf M, so erfüllen die Systeme von Umgebungen $V(x)$ aus Definition 3.5 die Axiome (U1) - (U4).*

(ii) *Erfüllen Mengensysteme $V(x)$ die Axiome (U1) - (U4) für alle $x \in M$, so ist*

$$\tau := \{O \subseteq M \mid O \in \bigcap_{x \in O} V(x)\}$$

eine Topologie auf M.

Beweis : Übung. ■

Nun zur topologisch definierten **Stetigkeit**:

3.12 Definition. *Seien (X, τ) und (Y, σ) topologische Räume und sei $f : (X, \tau) \to (Y, \sigma)$ eine Abbildung. Die Abbildung f heißt **stetig in** $x \in X$, wenn es für alle Umgebungen $V \in V(f(x))$ eine Umgebung $U \in V(x)$ gibt, so dass $f(U) \subseteq V$. f heißt **folgenstetig** in $x \in X$, wenn für alle Folgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X$ welche (bezüglich τ) gegen x konvergieren gilt $f(x_n) \to f(x)$ (bezüglich σ). Die Funktion $f : X \to Y$ ist **stetig** (**folgenstetig**) wenn f in jedem $x \in X$ stetig (folgenstetig) ist.*

Beispiele:

(i) Die stetigen Funktionen bezüglich der natürlichen Topologien von $\mathbb{R}^n$ und $\mathbb{R}^m$ sind gerade die bekannten stetigen Funktionen. (Siehe Lemma 3.13).

(ii) Jede Funktion ist stetig bezüglich der diskreten Topologie im Urbildbereich, oder bezüglich der chaotischen im Bildbereich.

(iii) Die konstanten Funktionen sind immer stetig.

3.13 Lemma. *Für $f : X \to Y$ und (X, τ), (Y, σ), topologische Räume sind folgende Aussagen äquivalent:*

(i) *f ist stetig.*

(ii) *Die Urbilder offener Mengen sind offen.*

(iii) *Die Urbilder abgeschlossener Mengen sind abgeschlossen.*

Hat (X, τ) in jedem Punkt eine abzählbare Umgebungsbasis, so kommt noch die Äquivalenz hinzu:

(iv) *f ist folgenstetig. (Dieses ist im allgemeinen eine schwächere Stetigkeit!)*

Beweis : Übung ■

Da ein metrischer Raum eine abzählbare Umgebungsbasis besitzt, sind Stetigkeit und Folgenstetigkeit in metrischen Räumen äquivalent.

Nun schlussendlich zur **Kompaktheit**:

3.14 Definition. *Sei (X, τ) ein topologischer Raum. Die Menge $K \subseteq X$ heißt **(überdeckungs-)kompakt**, wenn man aus jeder offenen Überdeckung von K eine endliche Teilüberdeckung auswählen kann, d.h., falls*

$$K \subseteq \bigcup_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda \qquad U_\lambda \in \tau,$$

so existieren $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \subset \Lambda$, so dass $K \subseteq \bigcup_{j=1}^{n} U_{\lambda_j}$. Eine Menge $K \subseteq X$ heißt ***relativ kompakt****, wenn $\overline{K}$ kompakt ist.*

Beispiele:

(i) Im $\mathbb{R}^n$ sind die kompakten Mengen bezüglich der natürlichen Topologie gerade die Mengen welche abgeschlossenen und beschränkt sind.

(ii) Bezüglich der diskreten Topologie sind nur endlich viele Punkte kompakt, bezüglich der chaotischen sind alle Mengen kompakt.

3.15 Lemma. *Sei (X, τ) ein topologischer Raum und $K \subseteq X$ kompakt. Dann gilt:*

(i) *K ist abgeschlossen.*

(ii) *Jede Teilmenge M von K ist relativ kompakt.*

Beweis :

Zu (i): K ist abgeschlossen genau dann, wenn $X \setminus K$ offen ist. Sei nun $x_0 \in X \setminus K$ so existieren für alle $y \in K$ Mengen $U_y, V_y \in \tau$, so dass $x_0 \in V_y$, $y \in U_y$ und $U_y \cap V_y = \emptyset$ (wegen der Hausdorffeigenschaft). Da $K \subseteq \bigcup_{y \in K} U_y$, gibt es $y_1 \ldots y_n \in K$ so dass $K \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} U_{y_i} =: U$. Da nun nach Konstruktion $x_0 \in \bigcap_{i=1}^{n} V_{y_i} =: V$, welches als endlicher Durchschnitt offener Mengen offen ist, und $U \cap V = \emptyset$, so folgt, dass $V \subseteq X \setminus U \subseteq X \setminus K$, woraus die Behauptung folgt.

Zu (ii): Sei $M \subseteq K$. Wir wollen zeigen, dass $\overline{M}$ kompakt ist. Aus $\overline{M} \subseteq \bigcup_{i \in I} U_i$ mit $U_i \in \tau$ folgt $K \subseteq \bigcup_{i \in I} U_i \;\cup\; X \setminus \overline{M}$. Die Behauptung folgt nun aus der Kompaktheit von K. ■

Man erinnert sich, dass im $\mathbb{R}^n$ jede Folge welche in einer kompakten Menge enthalten ist, eine konvergente Teilfolge besitzt. Dies ist zumindest in metrischen Räumen auch der Fall.

3.16 Definition. *Sei X ein topologischer Raum. Eine Menge $A \subset X$ heißt*

(i) **relativ folgenkompakt***, wenn für alle $(x_n) \subseteq A$ eine in X konvergente Teilfolge $(x_{n_k}) \subseteq (x_n)$ existiert, d.h für ein $x \in X$ gilt $x_{n_k} \to x$ für $k \to \infty$.*

(ii) **folgenkompakt***, wenn für alle $(x_n) \subseteq A$ eine in A konvergente Teilfolge $(x_{n_k}) \subseteq (x_n)$ existiert, d.h für ein $x \in A$ gilt $x_{n_k} \to x$ für $k \to \infty$.*

Sei X zusätzlich ein metrischer Raum, dann heißt $A \subset X$

(iii) **präkompakt**, *wenn für alle $\varepsilon > 0$ ein endliches ε-Netz existiert, d.h. es gibt endlich viele Punkte $x_1, \dots, x_n \in A$, so dass $A \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} B_\varepsilon(x_i)$.*

3.17 Satz. *In einem metrischen Raum (M, d) sind äquivalent:*

(i) *$A \subseteq M$ ist überdeckungskompakt.*

(ii) *A ist folgenkompakt.*

(iii) *A ist präkompakt und vollständig.*

Bemerkung: Im allgemeinen sind (i) und (ii) **nicht** äquivalent! Es folgt nicht einmal das eine aus dem anderen!

Beweis : "(i) $\Rightarrow$ (ii)": Durch Widerspruch: Angenommen es gibt eine Folge (x_n) so, dass alle Teilfolgen $(x_{n_k}) \subseteq (x_n)$ nicht in A konvergieren, so folgt, dass für alle $y \in A$ ein $r_y > 0$ existiert, mit:

$$N_y := \{k \in \mathbb{N} \mid x_k \in B_{r_y}(y) \cap A\} \text{ ist endlich.}$$

Nun ist $A \subseteq \bigcup_{y \in A} B_{r_y}(y)$, welches eine offene Überdeckung ist, also gibt es $y_1, \dots, y_n$, so dass $A \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} B_{r_{y_i}}(y_i)$. Daraus folgt $\bigcup_{i=1}^{n} N_{y_i}$ endlich. Da aber $(x_n) \subseteq A$ ist $\bigcup_{i=1}^{n} N_{y_i}$ eine Überdeckung der natürlichen Zahlen mit endlich vielen Elementen, was ein Widerspruch ist.

"(ii) $\Rightarrow$ (iii)": Sei $(x_n) \subseteq A$ eine Cauchyfolge. Da A folgenkompakt ist, existiert eine Teilfolge $(x_{n_k}) \subseteq (x_n)$ die gegen ein $x \in A$ konvergiert. Offensichtlich konvergiert dann die gesamte Folge (x_n) gegen x, d.h. A ist vollständig. Angenommen A sei nicht präkompakt, d.h. es gibt ein $\varepsilon > 0$ für das kein endliches ε-Netz existiert. Also so können wir induktiv eine Folge (x_n) konstruieren:

$$x_1 \in A \text{ beliebig und } x_{k+1} \in A \setminus \bigcup_{i=1}^{k} B_\varepsilon(x_i).$$

Jedoch besitzt (x_k) keine konvergente Teilfolge, da alle Folgenglieder einen Abstand größer als ε haben, das ist ein Widerspruch zur Annahme.

"(iii) $\Rightarrow$ (i)": Sei $(U_i)_{i\in I}$ eine offene Überdeckung von A. Sei $\mathcal{A}$ das System aller Teilmengen von A, die keine endliche Teilüberdeckung von $\{U_i\}_{i\in I}$ besitzen, d.h.

$$\mathcal{A} := \{B \subseteq A \,\big|\, J \subseteq I : B \subseteq \bigcup_{i\in J} U_i \Rightarrow J \text{ unendlich}\}\,.$$

Es gilt nun zu zeigen, dass $A \notin \mathcal{A}$. Sei $B \in \mathcal{A}$ und $\varepsilon > 0$. Da A präkompakt ist, existieren $x_i \in A$ mit $A \subset \bigcup_{i=1}^{n_\varepsilon} B_\varepsilon(x_i)$. Da $B \in \mathcal{A}$ muss es ein $i \in \{1, \dots n_\varepsilon\}$ geben mit $B \cap B_\varepsilon(x_i) \in \mathcal{A}$. Wir machen einen Widerspruchsbeweis und nehmen an, dass $A \in \mathcal{A}$. Wir konstruieren eine Folge (x_n) in dem wir zu immer kleiner werdendem $\varepsilon(= 1/k)$ einen Ball finden welcher nicht endlich von $\{U_i\}_{i\in I}$ überdeckt wird. Für $\varepsilon = 1$ gibt es ein $x_1 \in A$ mit $B_1 := B_1(x_1) \cap A \in \mathcal{A}$. Analog existiert für $\varepsilon = 1/k$ ein $x_k \in A$ so, dass $B_{\frac{1}{k}}(x_k) \cap \left(\bigcap_{m=1}^{k-1} B_{\frac{1}{m}}(x_m) \cap A\right) \in \mathcal{A}$. Damit haben wir eine Folge $B_m := \bigcap_{k=1}^{m} B_{\frac{1}{k}}(x_k) \cap A \in \mathcal{A}$ immer kleiner werdenden Mengen welche alle in $\mathcal{A}$ enthalten sind. Nun wähle $y_m \in B_m$, dann sind für $l \geq m$ sowohl y_m als auch y_l Elemente von $B_{\frac{1}{m}}(x_m)$. Die Dreiecksungleichung liefert somit $d(y_m, y_l) \leq d(y_m, x_m) + d(x_m, y_l) \leq \frac{2}{m}$. Also ist (y_m) eine Cauchyfolge. Da A vollständig ist gibt es ein $y \in A$, so dass $\varepsilon_m := d(y_m, y) \to 0$ für $m \to \infty$. Weil aber $A \subset \bigcup_{i\in I} U_i$ gibt es ein i_0, so dass $y \in U_{i_0}$. Diese Menge ist offen, also existiert ein $m_0 \in \mathbb{N}$, so dass $U_{i_0} \supseteq B_{\frac{2}{m_0}+\varepsilon_{m_0}}(y) \supseteq B_{\frac{2}{m_0}}(y_{m_0}) \supseteq B_{\frac{1}{m_0}}(x_{m_0}) \supseteq B_{m_0}$. Also ist $B_{m_0} \notin \mathcal{A}$ welches ein Widerspruch ist. ■

3.18 Definition. *Seien zwei Toplogien, τ_1 und τ_2 auf X gegeben, wobei*

$$\{\emptyset, X\} \subseteq \tau_1 \subseteq \tau_2 \subseteq 2^X.$$

Dann sagt man, dass τ_2 ***feiner*** *als τ_1 ist bzw. τ_1* ***gröber*** *als τ_2 ist.*

Ob eine Topologie gröber oder feiner ist als eine zweite, hat direkten Einfluss auf die drei zentralen Begriffe dieses Abschnittes. Es zeigt sich, dass sowohl feine als auch grobe Topologien ihre Vorzüge besitzen:

3.19 Lemma. *Seien zwei Topologien $\tau_1 \subseteq \tau_2$ auf X gegeben. Dann gilt:*

(i) *Konvergiert die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X$ bezüglich τ_2 gegen x so konvergiert sie auch bezüglich τ_1 gegen x.*

(ii) *Ist $A \subseteq X$ bezüglich τ_2 kompakt so auch bezüglich τ_1.*

(iii) *Ist* (Y, σ) *ein topologischer Raum und* $f : X \to Y$ *stetig bezüglich* τ_1 *so ist* f *auch stetig bezüglich* τ_2.

Beweis : Zu (i) Je mehr offene Mengen es gibt, desto mehr Umgebungen gibt es und um so seltener ist also Konvergenz.
Zu (ii) Je mehr offene Mengen es gibt, um so mehr offene Überdeckungen sind möglich und umso seltener ist Kompaktheit.
Zu (iii) Je weniger offene Mengen es gibt, um so weniger Funktion gibt es, von welchen alle Urbilder offener Mengen offen sind. ∎

Kapitel 2

Lineare Funktionalanalysis in Hilberträumen

2.1 Der Hilbertraum

1.1 Definition. *Ein* ***Prä-Hilbertraum*** H *ist ein Vektorraum über* $\mathbb{R}$ *bzw.* $\mathbb{C}$*, in dem ein* ***Skalarprodukt*** $(.,.)$ *gegeben ist, d.h. eine Abbildung von* $H \times H$ *nach* $\mathbb{R}$ *bzw.* $\mathbb{C}$ *mit den Eigenschaften*

(S1) **Bilinearität** *bzw.* **Sesquilinearität**

$$\begin{aligned}(\alpha u + \beta v, w) &= \alpha(u, w) + \beta(v, w)\,,\\ (u, \alpha z + \beta w) &= \overline{\alpha}(u, z) + \overline{\beta}(u, w)\,,\end{aligned}$$ [1]

für alle $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ *bzw.* $\mathbb{C}$ *und alle* $u, v, w, z \in H$*.*

(S2) $(.,.)$ *ist* **symmetrisch** *bzw.* **hermitesch***, d.h.*

$$(u, v) = \overline{(v, u)} \qquad \text{für alle } u, v \in H\,.$$

(S3) $(.,.)$ *ist* **positiv definit***, d.h.*

$$(u, u) \geq 0 \quad \text{für alle } u \in H,$$

und $(u, u) = 0$ *genau dann, wenn* $u = 0$*.*

In den meisten Beispielen werden wir mit reellen Hilberträumen arbeiten. Allerdings sind komplexe Hilberträume insbesondere für Fourierreihen sehr praktisch und deshalb werden wir viele Aussagen im allgemeinen Fall

[1] $\overline{\alpha}$ ist die konjungiert komplexe Zahl zu α.

betrachten.

• Wir benutzen die Bezeichnung $\|u\| := \sqrt{(u,u)}$ und werden zeigen, dass $\|\cdot\|$ alle Eigenschaften einer Norm hat.

Wir notieren einige Standardfolgerungen aus den Eigenschaften des Skalarproduktes. Es gilt:

$$\|a+b\|^2 = \|a\|^2 + 2\,\mathcal{R}e(a,b) + \|b\|^2\,, \tag{1.2}$$

$$\|a+b\|^2 + \|a-b\|^2 = 2\|a\|^2 + 2\|b\|^2\,, \tag{1.3}$$

wobei wir mit $\mathcal{R}e$ den Realteil bezeichnen und $(b,a) = \overline{(a,b)}$ benutzt haben.

1.4 Lemma (Cauchy-Schwarzsche Ungleichung). *Sei H ein Prä-Hilbertraum. Dann gilt für alle $u, v \in H$*

$$|(u,v)| \le \|u\|\,\|v\|\,.$$

Beweis : (i) Im reellen Fall gilt für $\alpha \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$

$$0 \le \big(\alpha u - \tfrac{1}{\alpha}v,\ \alpha u - \tfrac{1}{\alpha}v\big) = |\alpha|^2\,\|u\|^2 + \frac{1}{|\alpha|^2}\|v\|^2 - 2\,(\alpha u, \frac{1}{\alpha}v)\,,$$

und somit

$$2\,(u,v) \le |\alpha|^2\,\|u\|^2 + \frac{1}{|\alpha|^2}\|v\|^2\,. \tag{1.5}$$

Mit $\alpha = (\|v\|/\|u\|)^{\frac{1}{2}}$, $u \neq 0$, folgt

$$(u,v) \le \|u\|\,\|v\|\,.$$

Übergang von u zu $-u$ ergibt die behauptete Ungleichung für $u \neq 0$. Falls $u = 0$ ist, ergibt sich für $\alpha \to \infty$ aus (1.5), dass $(0,v) = 0$ für alle $v \in H$.

(ii) Im komplexen Fall gilt für $\alpha \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$, $\rho \in \mathbb{C}$

$$0 \le \big(\alpha u - \frac{\rho}{\alpha}v, \alpha u - \frac{\rho}{\alpha}v\big) = |\alpha|^2\|u\|^2 - 2\,\mathcal{R}e(u,\rho v) + \frac{|\rho|^2}{|\alpha|^2}\|v\|^2\,.$$

Man setze $\alpha = (\|v\|/\|u\|)^{\frac{1}{2}}$, $u \neq 0$. Dann folgt

$$2\mathcal{R}e\big(\overline{\rho}(u,v)\big) \le (1+|\rho|^2)\|u\|\,\|v\|$$

Setze $\rho = \frac{(u,v)}{|(u,v)|}$, falls $(u,v) \neq 0$. Dann folgt, da $|\rho| = 1$,

$$|(u,v)| \le \|u\|\,\|v\|,$$

also die behauptete Ungleichung für $u \neq 0$. Für $u = 0$ geht man genau wie im reellen Fall vor. ∎

• Aus dem Beweis geht hervor, dass die Cauchy-Schwarsche Ungleichung auch für positiv semidefinite Sesquilinearformen gilt, d.h., $(\cdot, \cdot)$ erfüllt (S1), (S2) und es gilt $(u, u) \geq 0$ für alle $u \in H$.

1.6 Lemma. *Sei H ein Prä-Hilbertraum. Dann gilt:*

(i) $\quad \|\alpha u\| = |\alpha| \, \|u\|$, *(Homogenität)*,

(ii) $\quad \|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$, *(Dreiecksungleichung)*.

Beweis :

(i) $\|\alpha u\|^2 = (\alpha u, \alpha u) = \alpha \, \overline{\alpha}(u, u) = |\alpha|^2 \, \|u\|^2$

(ii)
$$\begin{aligned} \|u + v\|^2 &= \|u\|^2 + 2 \, \mathcal{R}e(u, v) + \|v\|^2 \\ &\leq \|u\|^2 + 2 \, |(u, v)| + \|v\|^2 \\ &\leq \|u\|^2 + 2 \, \|u\| \|v\| + \|v\|^2 = (\|u\| + \|v\|)^2 \, . \end{aligned}$$
∎

Lemma 1.6 und Definition 1.1 rechtfertigen folgende Definition.

1.7 Definition. *Sei H ein Prä-Hilbertraum. Dann ist $\|u\| := \sqrt{(u, u)}$ die durch das Skalarprodukt in H* ***induzierte Norm****.*

1.8 Definition. *Ein* ***Hilbertraum*** *ist ein Prä-Hilbertraum, der bezüglich der induzierten Norm vollständig ist.*

• Jeder Hilbertraum ist ein Banachraum.

Beispiele:

(a) $\mathbb{R}^n$ mit dem euklidischen Skalarprodukt $(.,.)$ ist ein Hilbertraum.

(b) Der Raum der komplexwertigen stetigen Funktionen $C([a, b]; \mathbb{C})$ mit dem Skalarprodukt

$$(f, g) = \int_a^b f \overline{g} \, dx$$

ist ein Prä-Hilbertraum, aber kein Hilbertraum wie das folgende Beispiel zeigt.

Sei $[a, b] = [-1, 1]$ und

$$f_n(x) = \begin{cases} 1, & x \in [\frac{1}{n}, 1] \\ nx, & x \in [-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}] \\ -1 & x \in [-1, -\frac{1}{n}]. \end{cases}$$

Dann gilt punktweise $f_n \to f$, wobei

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \in (0,1], \\ 0 & x = 0, \\ -1 & x \in [-1,0). \end{cases}$$

Aus dem Satz über dominierte Konvergenz folgt $f_n \to f$ in $L^2(-1,1)$. Also ist $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge deren Limes keine stetige Funktion ist.

(c) $L^2(\Omega;\mathbb{C})$, Ω offene Teilmenge des $\mathbb{R}^n$, ist ein Hilbertraum. Das Skalarprodukt ist erklärt durch

$$(f,g)_{L^2} := (f,g) = \int_\Omega f\,\overline{g}\,dx\,.$$

Es induziert die übliche L^2-Norm. Der $L^2(\Omega;\mathbb{C})$ ist vollständig (Satz von Fischer–Riesz, Analysis III).

(d) Der Raum $\ell^2 := \{(c_j)_{j\in\mathbb{N}} \bigm| \sum_{j=1}^\infty |c_j|^2 < \infty\}$ mit Skalarprodukt

$$(c,d)_{\ell^2} := \sum_{j=1}^\infty c_j\overline{d_j}$$

ist ein Hilbertraum. Die Vollständigkeit folgt ebenfalls aus dem Satz von Fischer-Riesz, wenn man als Maßraum $\mathbb{N}$ mit dem Zählmaß wählt.

(e) Der Sobolevraum $H^{1,2}(\Omega)$, Ω offene Teilmenge des $\mathbb{R}^n$ (siehe nachfolgende Definitionen).

Wir erläutern im Folgenden *zwei* Definitionen des Sobolevraumes $H^{1,2}(\Omega)$. Im Folgenden sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ eine offene Menge und alle Funktionen seien reellwertig.

1.9 Definition. *Sei $\tilde{H}^{1,2}$ die Menge aller Funktionen aus $C^1(\Omega)$ mit $\int_\Omega \big(|u|^2 + |\nabla u|^2\big)\,dx < \infty$. Bezüglich des (sogenannten $H^{1,2}$-Skalarproduktes)*

$$(u,v)_1 := \int_\Omega u\,v\,dx + \int_\Omega \nabla u\cdot\nabla v\,dx = \int_\Omega u\,v\,dx + \int_\Omega \sum_{i=1}^n D_i u D_i v\,dx$$

ist $\tilde{H}^{1,2}$ ein Prä-Hilbertraum.

1.10 Definition (Vervollständigung). *$H^{1,2}(\Omega)$ ist der Restklassenraum der Cauchyfolgen $(u_j)_{j\in\mathbb{N}} \subseteq \tilde{H}^{1,2}$ nach den Nullfolgen (alles bezüglich der induzierten $H^{1,2}$-Norm).*

• Man kann sich $H^{1,2}(\Omega)$ als die Menge aller Funktionen u vorstellen, für die eine Cauchyfolge (u_j) in der $H^{1,2}$-Norm existiert, so dass $u_j \to u$ in $L^2(\Omega)$. Die Grösse $L^2 - \lim\limits_{j\to\infty} \nabla u_j$ kann man sich als eine Verallgemeinerung der Ableitung (siehe nächste Definition der schwachen Ableitung) von u vorstellen und schreibt $\nabla u := \lim\limits_{j\to\infty} \nabla u_j$. Durch die Restklassenbildung sieht man Limites von Cauchyfolgen $(u_j), (v_j)$ als gleich an, wenn $u_j - v_j \to 0$ in $\tilde{H}^{1,2}$. Diese Art der Definition des Sobolevraums $H^{1,2}$ nennt man die „Definition durch Vervollständigung“.

Für die zweite Definition von $H^{1,2}(\Omega)$ (für den Anfänger am empfehlenswertesten) benötigen wir zunächst den Begriff der schwachen Ableitung.

1.11 Definition. *Sei $u \in L^2(\Omega)$. Die Funktion $u_i \in L^2(\Omega)$ heißt* ***schwache Ableitung von*** u ***bezüglich der*** i***-ten Variablen****, wenn*

$$(u, D_i\varphi)_{L^2} = -(u_i, \varphi)_{L^2} \qquad \text{für alle } \varphi \in C_0^\infty(\Omega). \tag{1.12}$$

• Die Funktion u_i aus der Definition wird meist mit $D_i u$ oder $\partial_i u$ bezeichnet.
• Hierbei ist $C_0^\infty(\Omega)$ der sogenannte **Raum der Testfunktionen**.
• Die Definition 1.11 ist motiviert durch die partielle Integration, falls $u \in C^1(\Omega)$, denn dann gilt

$$(u, D_i\varphi)_{L^2} = -(D_i u, \varphi)_{L^2}\,.$$

1.13 Lemma (Eindeutigkeit der schwachen Ableitung). *Sei $u \in L^2(\Omega)$ und seien $u_i, \tilde{u}_i \in L^2(\Omega)$ schwache Ableitungen von u. Dann gilt $u_i = \tilde{u}_i$ fast überall.*

Beweis : Aus Definition 1.11 folgt, dass für alle $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$

$$\int\limits_\Omega (u_i - \tilde{u}_i)\varphi\, dx = 0\,. \tag{1.14}$$

Das Fundamentallemma der Variationsrechnung (Analysis III, Folgerung 15.8) liefert $u_i = \tilde{u}_i$ in $L^2(\Omega)$, woraus sofort die Behauptung folgt. ∎

1.15 Definition (mit schwachen Ableitungen).

$$H^{1,2}(\Omega) := \Big\{ u \in L^2(\Omega) \,\Big|\, u \text{ besitzt schwache Ableitungen } D_i u, i = 1, \ldots, n \Big\}\,.$$

Das Skalarprodukt wird dann mit Hilfe der schwachen Ableitungen definiert durch

$$(u, v)_1 = (u, v)_{L^2} + (\nabla u, \nabla v)_{L^2}\,.$$

1.16 Satz. $H^{1,2}(\Omega)$ *ist vollständig.*

Beweis : Sei (u_j) Cauchy-Folge in $H^{1,2}(\Omega)$. Dann ist (u_j) auch eine Cauchy-Folge in $L^2(\Omega)$ mit Limes $u \in L^2(\Omega)$. Also gilt aufgrund der Stetigkeit des Skalarproduktes bzgl. der Normkonvergenz: $(D_i\varphi, u_j) \xrightarrow{j} (D_i\varphi, u)$ für alle $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$. Wir zeigen , dass u verallgemeinerte Ableitungen in $L^2(\Omega)$ hat. Da $(D_i u_j)$ ebenfalls eine Cauchy-Folge in $L^2(\Omega)$ ist, gibt es ein $\tilde{u}_i \in L^2(\Omega)$ mit $D_i u_j \xrightarrow{j} \tilde{u}_i$ in $L^2(\Omega)$. Aus $-(D_i\varphi, u) \xleftarrow{j} -(D_i\varphi, u_j) = (\varphi, D_i u_j) \xrightarrow{j} (\varphi, \tilde{u}_i)$ für alle $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ folgt $\tilde{u}_i = D_i u$. ■

• Ein **Gebiet** Ω, d.h. eine offene, zusammenhängende Menge, deren Rand lokal durch Lipschitz-stetige Funktionen beschrieben werden kann, heißt **Gebiet mit Lipschitz-stetigem Rand** und man schreibt $\partial\Omega \in C^{0,1}$, wobei $C^{0,1}$ die Menge der Lipschitz-steingen Funktionen bezeichnet. Man kann zeigen, dass die zwei Definitionen für $H^{1,2}(\Omega)$ im Falle von Gebieten mit $\partial\Omega \in C^{0,1}$ übereinstimmen (siehe Nečas, Les méthodes directes en théorie des équations elliptiques, S. 63 ff, Alt, S. 55 ff)

In der Theorie der partiellen Differentialgleichungen ist es von großer Bedeutung, zum Ausdruck zu bringen, dass eine $H^{1,2}$-Funktion am Rand des Gebietes in einem verallgemeinerten Sinne verschwindet. Dies leistet der Raum

$$H_0^{1,2}(\Omega) = \overline{C_0^\infty(\Omega)}^{H^{1,2}} = \big\{u \in H^{1,2}(\Omega) \,\big|\, \exists u_j \in C_0^\infty(\Omega) \text{ mit } u_j \to u \text{ in } H^{1,2}(\Omega)\big\}.$$

1.17 Lemma. *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt, $0 \in \Omega$, und $s < \frac{n}{2} - 1$. Dann ist*

$$|x|^{-s} \in H^{1,2}(\Omega)\,.$$

Für $s \geq \frac{n}{2} - 1$ ist $|x|^{-s} \notin H^{1,2}(\Omega)$.

Beweis : Die Funktion $|x|^{-s}$ ist fast überall klassisch differenzierbar mit der Ableitung

$$\nabla|x|^{-s} = -s\,x\,|x|^{-s-2}$$

und mit Hilfe von Polarkoordinaten erhält man $\big|x_i\,|x|^{-s-2}\big| = |x|^{-s-1} \in L^2(\Omega)$ genau dann, wenn $s < \frac{n}{2} - 1$. In der Tat gilt, falls $B_R(0) \subseteq \Omega$

$$\int\limits_{B_R(0)} |x|^{-2(s+1)}\,dx = \int\limits_0^R \int\limits_{S_r(0)} r^{-2(s+1)}\,dH_{n-1}\,dr = c_n \int\limits_0^R r^{n-1-2(s+1)}\,dr < \infty$$

genau für $n-1-2(s+1) > -1$, d.h. $s < \frac{n}{2}-1$. Da auf $B_1(0)$ die Abschätzung $|x|^{-s} \leq |x|^{-s-1}$ gilt, folgt somit auch $|x|^{-s} \in L^2(\Omega)$. Wir müssen also noch zeigen, dass die klassischen partiellen Ableitungen fast überall mit den schwachen Ableitungen übereinstimmen. Um dies nachzuweisen, schneiden wir am besten den kritischen Punkt $x = 0$ heraus. Für $\varepsilon > 0$, klein genug, und $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ gilt aufgrund partieller Integration

$$\int\limits_{\Omega\setminus B_\varepsilon(0)} |x|^{-s} D_i\varphi\, dx = \int\limits_{\Omega\setminus B_\varepsilon(0)} s x_i\, |x|^{-s-2}\, \varphi\, dx + \int\limits_{\partial B_\varepsilon(0)} |x|^{-s}\, \varphi\, n_i\, dH_{n-1}.$$

Für das Randintegral ergibt sich

$$\begin{aligned}\Bigg|\int\limits_{\partial B_\varepsilon(0)} |x|^{-s}\, \varphi\, n_i\, dH_{n-1}\Bigg| &\le \|\varphi\|_\infty \int\limits_{\partial B_\varepsilon(0)} \varepsilon^{-s}\, dH_{n-1} \\ &= c_n \varepsilon^{-s} \varepsilon^{n-1} \to 0 \qquad (\varepsilon \to 0),\end{aligned}$$

falls $s < n-1$. Dies gilt aber für $s < \frac{n}{2} - 1$. Der Satz von Lebesgue über dominierte Konvergenz liefert für $\varepsilon \to 0$

$$\int\limits_\Omega |x|^{-s} D_i\varphi\, dx = \int\limits_\Omega s x_i\, |x|^{-s-2}\, \varphi\, dx,$$

d.h. die schwache Ableitung $D_i(|x|^{-s})$ stimmt mit der klassischen Ableitung $-s x_i\, |x|^{-s-2}$ überein. ∎

Für $n = 3, 4$ ist also z. B. $\frac{1}{|x|} \notin H^{1,2}$, für $n \geq 5$ gilt die Inklusion jedoch. Für $n \geq 3$ ist $|x|^{-1/4}$ eine unbeschränkte $H^{1,2}$-Funktion. Für $n = 2$ liefert Lemma 1.17 keine unbeschränkte $H^{1,2}$-Funktion. Allerdings ist

$$\log \left|\log \frac{1}{|x|}\right|$$

eine unbeschränkte $H^{1,2}$-Funktion. Im Fall $n = 1$ sind $H^{1,2}$-Funktionen Hölderstetig zum Exponenten $\frac{1}{2}$.

• Leider können $H^{1,2}$-Funktionen auf einer dichten Menge Singularitäten haben, z.B.

$$u(x) := \sum_{j=0}^\infty 2^{-j} \left|x - x^{(j)}\right|^{-s}, \quad s \text{ wie im Lemma 1.17.}$$

$x^{(j)}$ durchläuft alle Punkte aus Ω mit rationalen Koordinaten.

2.2 Der Projektionssatz

Ist H ein unendlich-dimensionaler Hilbertraum und V ein linearer Teilraum, so gibt es im Gegensatz zum endlich-dimensionalen Fall *nicht notwendig* eine Zerlegung der Gestalt

$$H = V \oplus V^{\perp} . \tag{2.1}$$

Hierbei ist das **„Orthogonalkomplement von V"** definiert durch

$$V^{\perp} := \left\{ x \in H \,\middle|\, (x, v) = 0 \quad \forall v \in V \right\} .$$

Die Gleichung (2.1) bedeutet: Zu jedem $u \in H$ gibt es eine eindeutige Zerlegung

$$u = v + w \,, \quad v \in V \,, \quad w \in V^{\perp} .$$

Ein Gegenbeispiel zu (2.1) ist der Hilbertraum $L^2(I)$, $I = (a, b)$ und der Unterraum $V = C_0^\infty(I)$. In der Tat: Sei $u \in L^2(I)$, $u \notin C_0^\infty(I)$. Angenommen, es wäre $u = v + w$ mit $v \in C_0^\infty(I)$ und $w \in C_0^\infty(I)^{\perp}$, so folgt aus

$$\int\limits_I w\varphi \, dx = 0 \qquad \text{für alle } \varphi \in C_0^\infty(I)$$

und dem Fundamentallemma der Variationsrechnung (Analysis III, Folgerung 15.8), dass $w = 0$. Somit ist $u = v \in C_0^\infty(I)$, was ein Widerspruch ist.

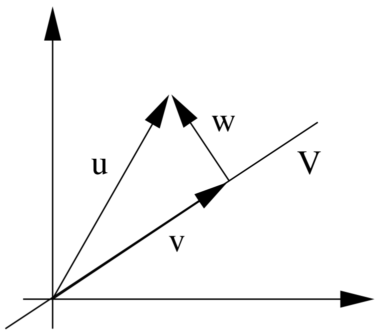
Die Hilbertraum-Theorie startet mit dem Satz, dass die Zerlegung (2.1) für *abgeschlossene* lineare Unterräume $V \subset H$ funktioniert.

2.2 Satz (Projektionssatz). *Sei V ein abgeschlossener Teilraum des Hilbertraumes H. Dann gibt es zu jedem $u \in H$ eine eindeutige Zerlegung*

$$u = v + w \,, \quad v \in V \,, \quad w \in V^{\perp} .$$

Man schreibt: $H = V \oplus V^{\perp}$.

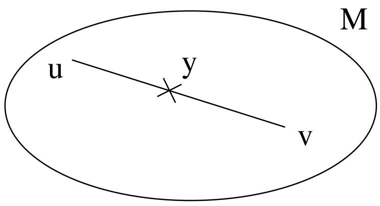
Der Beweis beruht auf der Tatsache, dass das Element v in Satz 2.2 dem Element u „am nächsten" ist, d.h. $\|u - v\| = \inf \left\{ \|u - y\| \,\middle|\, y \in V \right\}$.



Zur Konstruktion eines solchen Elementes benötigen wir einen entsprechenden Satz über die *Annahme des minimalen Abstandes*, den wir gleich allgemein für *konvexe* Mengen M formulieren.

2.3 Definition. *Eine Menge $M \subset H$ heißt **konvex**, wenn für alle $u, v \in M$ und für alle $\alpha \in [0,1]$ gilt*

$$y = \alpha u + (1-\alpha)v \in M .$$



2.4 Satz. *Sei $M \subset H$ eine nichtleere, abgeschlossene, konvexe Menge und $u \in H$. Dann gibt es ein eindeutiges Element $v \in M$ mit*

$$\|u - v\| = \inf \left\{ \|u - w\| \,\middle|\, w \in M \right\} =: d .$$

Beweis : Wenn $u \in M$, gibt es nichts zu beweisen ($\inf = 0$). Sei also $u \notin M$. Sei $(w_j) \subseteq M$ eine Minimalfolge, d.h. $\|u - w_j\| \searrow d$ $(j \to \infty)$. Da M konvex ist und somit $\frac{1}{2}(w_j + w_k) \in M$, gilt $\|u - \frac{1}{2}(w_j + w_k)\|^2 \geq d^2$. Damit folgt

$$\begin{aligned} d^2 + \|\tfrac{1}{2}(w_k - w_j)\|^2 &\leq \|u - \tfrac{1}{2}(w_j + w_k)\|^2 + \|\tfrac{1}{2}(w_k - w_j)\|^2 \\ &= \tfrac{1}{2}\|u - w_j\|^2 + \tfrac{1}{2}\|u - w_k\|^2 \overset{j,k\to\infty}{\searrow} d^2, \end{aligned}$$

wobei wir die Parallelogrammgleichung (1.3) mit $a = \frac{1}{2}u - \frac{1}{2}w_j$, $b = \frac{1}{2}u - \frac{1}{2}w_k$ benutzt haben. Also ist (w_j) eine Cauchyfolge und hat einen Limes $v \in M$. (Beachte, dass M abgeschlossen ist.) Da $w_j \to v$, folgt $\|u - v\|^2 = d^2$, und der Satz ist - bis auf die Eindeutigkeit - bewiesen. Das Element $v \in M$ ist das den minimalen Abstand realisierende Element.

Die Eindeutigkeit folgt aus der folgenden Überlegung: Sei $v, v' \in M$ und $\|u - v\| = d$, $\|u - v'\| = d$. Dann gilt im *reellen Fall*

$$\begin{aligned} \|u - \tfrac{1}{2}(v + v')\|^2 &= \|u\|^2 - (u,v) - (u,v') + \tfrac{1}{4}\|v\|^2 + \tfrac{1}{2}(v,v') + \tfrac{1}{4}\|v'\|^2 \\ &= \tfrac{1}{2}\|u - v\|^2 + \tfrac{1}{2}\|u - v'\|^2 - \tfrac{1}{4}\|v\|^2 + \tfrac{1}{2}(v,v') - \tfrac{1}{4}\|v'\|^2 \\ &= d^2 - \tfrac{1}{4}\|v - v'\|^2 < d^2, \quad \text{falls } v \neq v' , \end{aligned}$$

d.h. falls $v \neq v'$, kann $\|u - v\|$ und $\|u - v'\|$ nicht der minimale Abstand von u zu M sein. Im *komplexen Fall* ersetzt man in der ersten Zeile (u, v) und

(u, v') durch $\mathcal{R}e(u, v)$ bzw. $\mathcal{R}e(u, v')$ sowie in der ersten und zweiten Zeile (v, v') durch $\mathcal{R}e(v, v')$. ∎

Beweis (von Satz 2.2): Aus Satz 2.4 mit $M = V$ folgt die Existenz eines eindeutigen Elementes $v \in V$ mit $\|u - v\|^2 = \inf \{ \|u - w\|^2 \mid w \in V \} =: d^2$. Es gilt

$$\|u - v\|^2 \leq \|u - v + t\varphi\|^2 , \quad t \in \mathbb{R} \text{ bzw. } \mathbb{C}, \quad \varphi \in V .$$

Daraus folgt, zunächst im *reellen Fall*:

$$0 \leq 2\,(u - v, t\varphi) + |t|^2 \; \|\varphi\|^2 .$$

Kürzen mit $t > 0$ und Grenzübergang $t \to 0$ ergibt $0 \leq 2\,(u - v, \varphi)$ für alle $\varphi \in V$. Ersetzt man in dieser Ungleichung φ durch $-\varphi$, erhält man $0 \geq 2\,(u - v, \varphi)$, also insgesamt

$$0 = 2\,(u - v, \varphi) \quad \text{für alle } \varphi \in V$$

Man setze $w = u - v$. Dann gilt $w \perp V$ und $u = u - v + v = v + w,\ v \in V,\ w \perp V$.

Im *komplexen Fall* erhält man

$$0 \leq 2\,\mathcal{R}e(u - v, t\varphi) + |t|^2 \, \|\varphi\|^2 \tag{2.5}$$

und daraus wie eben

$$0 = \mathcal{R}e(u - v, \varphi)$$

Um auch $\mathcal{I}m(u - v, \varphi) = 0$ zu erhalten, wählt man in (2.5) $t = \mathrm{i}\,\tau$ ($\mathrm{i} = \sqrt{-1}$, $\tau \in \mathbb{R}$, $\tau > 0$) und erhält

$$0 \leq 2\,\mathcal{R}e(-\,\mathrm{i}\,\tau(u - v, \varphi)) - \tau^2 \, \|\varphi\|^2$$

Kürzen mit τ, und Grenzübergang $\tau \to 0$ ergibt

$$0 \leq \mathcal{R}e(-\,\mathrm{i}(u - v, \varphi)) = \mathcal{I}m(u - v, \varphi)$$

Durch Übergang zu $-\varphi$ folgt wieder insgesamt

$$\mathcal{I}m(u - v, \varphi) = 0$$

Die Eindeutigkeit der Zerlegung ergibt sich folgendermassen: Sei $u = v + w = v' + w'$ mit $w, w' \perp V$ und $v, v' \in V$. Daraus folgt $v - v' = w' - w$. Skalare Multiplikation mit $v - v'$ ergibt

$$\|v - v'\|^2 = (w' - w, v - v') = 0 .$$

∎

2.6 Folgerung. *Sei V ein abgeschlossener Teilraum des Hilbertraumes H. Der Projektionsoperator $P\colon H \to V$ definiert durch $Pu = v$, wobei $u = v+w$, $v \in V$, $w \in V^{\top}$, die eindeutige Zerlegung aus Satz 2.2 ist, ist ein linearer, stetiger Operator.*

Beweis : Die Linearität folgt sofort aus der eindeutigen Zerlegung $H = V \oplus V^{\top}$ aus Satz 2.2. Die Beschränkheit von P ergibt sich aus folgender Rechnung

$$\|Pu\|^2 = (Pu, Pu) = (u, Pu) \le \|Pu\|\,\|u\|\,,$$

wobei wir benutzt haben, dass $Pu \perp u - Pu$. ∎

2.7 Folgerung. *Ein linearer Teilraum V ist dicht in H genau dann, wenn $V^{\perp} = \{0\}$.*

Beweis : (i) Sei $\overline{V} = H$. Aus $u \in V^{\perp}$ folgt sofort $u \in \big(\overline{V}\big)^{\perp} = H^{\perp}$. Aber $H^{\perp} = \{0\}$, denn $u \perp u$ impliziert $u = 0$.
(ii) Sei $V^{\perp} = \{0\}$ und V nicht dicht in H, d.h. $\overline{V} \ne H$. Also existiert ein $u \in H \setminus \overline{V}$. Satz 2.2 liefert die Zerlegung $u = v + w$ mit $v \in \overline{V}$ und $w \in \big(\overline{V}\big)^{\perp}$. Da $u \notin \overline{V}$ muss gelten: $w \ne 0$. Dies ist ein Widerspruch zu $V^{\perp} = \{0\}$. ∎

2.3 Der Rieszsche Darstellungssatz und beschränkte lineare Operatoren

3.1 Satz (Riesz). *Sei H ein Hilbertraum. Zu jedem $F \in H^*$ gibt es eindeutig bestimmtes Element $f \in H$ mit*

$$\langle F, u\rangle = (u, f) \qquad \forall\, u \in H. \tag{3.2}$$

Für dieses Element gilt:

$$\|F\|_{H^*} = \|f\|_H\,.$$

Beweis : Sei $N = \{\, x \in H \,\big|\, \langle F, x\rangle = 0 \,\}$ der Kern von F. N ist ein abgeschlossener, linearer Teilraum von H. Ist nämlich $u_m \in N$, $u_m \to u$, so folgt $0 = \langle F, u_m\rangle \to \langle F, u\rangle$, d.h. $u \in N$. O.B.d.A. dürfen wir $N \ne H$ annehmen. (Andernfalls ist $f = 0$.) Es gibt daher ein $w_0 \in H$, das nicht in N ist. Nach dem Projektionssatz ist

$$w_0 = v + w \qquad \text{mit } v \in N, w \in N^{\perp}, w \ne 0.$$

Wir beachten, dass $\langle F, w\rangle \neq 0$, da $w \notin N$, und $\langle F, u - \frac{\langle F,u\rangle}{\langle F,w\rangle} w\rangle = 0$, also $u - \frac{\langle F,u\rangle}{\langle F,w\rangle} w \in N$. Da $w \in N^\perp$, folgt

$$\big(u - \tfrac{\langle F,u\rangle}{\langle F,w\rangle} w, w\big) = 0$$

und

$$\big(u, w\big) = \tfrac{\langle F,u\rangle}{\langle F,w\rangle} \|w\|^2,$$

somit

$$\langle F, u\rangle = \tfrac{\langle F,w\rangle}{\|w\|^2} (u, w) = \big(u, \frac{\overline{\langle F, w\rangle}}{\|w\|^2} w\big).$$

Damit ist das darstellende Element $f := \frac{\overline{\langle F,w\rangle}}{\|w\|^2}\, w$ konstruiert.
Eindeutigkeit: Seien $f_1, f_2 \in H$ darstellende Elemente von (3.2), d.h. es gilt $(u, f_1) = \langle F, u\rangle = (u, f_2)$ für alle $u \in H$. Wählt man $u := f_1 - f_2$ folgt

$$\|f_1 - f_2\|^2 = (f_1 - f_2, f_1 - f_2) = \langle F, f_1 - f_2\rangle - \langle F, f_1 - f_2\rangle = 0,$$

d.h. $f_1 = f_2$.
Aus (3.2), Lemma 1.4 und der Definition der Norm im Dualraum folgt sofort

$$\|F\|_{H^*} = \sup_{\|u\|\leq 1} |\langle F, u\rangle| = \sup |(u, f)| \leq \sup_{\|u\|\leq 1} \|f\|\|u\| = \|f\|_H.$$

Wenn man in (3.2) $u = \frac{f}{\|f\|}$ wählt erhält auch

$$\|f\| = (u, f) = \langle F, u\rangle \leq \|F\|_{H^*} \Big\| \frac{f}{\|f\|} \Big\| = \|F\|_{H^*}.$$

■

• Man sagt daher: H lässt sich mit H^* identifizieren und schreibt $H \cong H^*$, und oft auch unpräziserweise $H = H^*$.

In Kapitel 1 haben wir gesehen, dass stetige, lineare Operatoren die kanonischen Abbildungen zwischen normierten Vektorräumen sind. Wir wollen uns nun solche Operatoren in Falle von Hilberträumen genauer ansehen.

Beispiele:

(i) Sei Ω eine offene Teilmenge des $\mathbb{R}^n$. Sei $A : L^2(\Omega) \to L^2(\Omega)$ gegeben durch

$$(Au)(x) := g(x)\, u(x), \quad u \in L^2(\Omega),$$

mit einer festen Funktion $g \in L^\infty(\Omega)$. Der Operator A ist beschränkt, da $\|Au\|_{L^2} \leq \|g\|_{L^\infty} \|u\|_{L^2}$.

(ii) Sei Ω eine offene Teilmenge des $\mathbb{R}^n$ und sei $A : H^{1,2}(\Omega) \to L^2(\Omega)$ definiert durch

$$(Au)(x) := D_1 u(x)\,,$$

wobei D_1 die schwache partielle Ableitung in Richtung $\mathbf{e}_1$ ist. A ist beschränkt, da

$$\|D_1 u\|_{L^2} \le \|\nabla u\|_{L^2} \le \|u\|_{H^{1,2}}\,.$$

(iii) Sei Ω eine offene Teilmenge des $\mathbb{R}^n$ und die Funktion $K : \Omega \times \Omega \to \mathbb{R}$ ein Element von $L^2(\Omega \times \Omega)$, d.h. $\int\limits_\Omega \int\limits_\Omega |K(x,y)|^2\, dx\, dy =: C < \infty$. Dann ist der durch

$$(Au)(x) := \int\limits_\Omega K(x,y)\, u(y)\, dy \tag{3.3}$$

definierte Operator $A : L^2(\Omega) \to L^2(\Omega)$ beschränkt. In der Tat haben wir

$$\begin{aligned}
\|Au\|_{L^2}^2 &= \int\limits_\Omega \bigg| \int\limits_\Omega K(x,y)\, u(y)\, dy \bigg|^2 dx \\
&\le \int\limits_\Omega \int\limits_\Omega |K(x,y)|^2\, dy \int\limits_\Omega |u(y)|^2\, dy\, dx \\
&= \int\limits_\Omega \int\limits_\Omega |K(x,y)|^2\, dy\, dx \int\limits_\Omega |u(y)|^2\, dy = C\|u\|^2\,.
\end{aligned}$$

Die Abbildung in (3.3) heißt **Integraloperator mit Kern** K. Es gibt Kerne, die so singulär sind, dass $\int\int |K(x,y)|^2\, dx\, dy = \infty$, die aber dennoch einen beschränkten Integraloperator erzeugen.

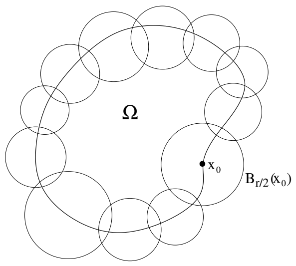
(iv) Sei Ω ein beschränktes Gebiet des $\mathbb{R}^n$ mit $\partial\Omega \in C^1$. Jede Funktion $u \in C^1(\overline{\Omega})$ besitzt eine Restriktion $\tilde{R}u$ auf $\partial\Omega$, die definiert wird durch

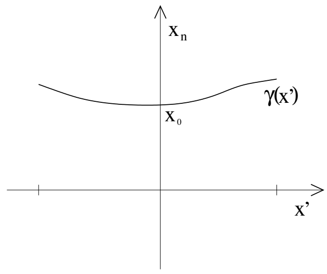
$$(\tilde{R}u)(z) := u(z)\,, \qquad z \in \partial\Omega\,.$$

3.4 Lemma. *Es gibt eine Konstante K, die nur von Ω abhängt so, dass für alle $u \in C^1(\overline{\Omega})$ gilt*

$$\|\tilde{R}u\|_{L^2(\partial\Omega)} \le K \|u\|_{H^{1,2}(\Omega)}\,.$$

Beweis : Da $\partial\Omega \in C^1$ kann man den Rand durch Bälle $B_{r/2}(x_0) \subset \mathbb{R}^n$ überdecken, so dass er lokal durch C^1-Funktionen $\gamma(x')$ beschrieben werden kann.





a) Sei $x_0 \in \partial\Omega$ und sei der Rand nahe x_0 flach, d.h. es gibt ein $r > 0$ so, dass [1] $\partial\Omega \cap B_r(x_0) = \{(x', x_n) \big| x_n = 0\}$. Sei $B_s^+ =: B_r(x_0) \cap \{(x', x_n) \big| x_n \geq 0\}$, $0 < s < r$ und sei τ eine Abschneidefunktion, d.h. $\tau \in C_0^\infty(B_r(x_0))$, $\tau = 1$ in $B_{r/2}(x_0)$. Dann gilt:

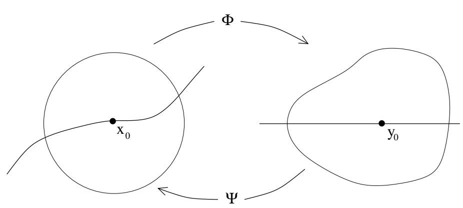
$$\begin{aligned}
\int\limits_{B_{r/2}(x_0)\cap\partial\Omega} |u|^2 \, dx' &\leq \int\limits_{\{x_n=0\}} |u|^2 \, \tau \, dx' = - \int\limits_{B_r^+(x_0)} D_{x_n}\big(|u|^2 \, \tau\big) \, dx \\
&= - \int\limits_{B_r^+(x_0)} |u|^2 \, D_{x_n}(\tau) + 2|u| \operatorname{sign}(u) D_{x_n}(u) \, \tau \, dx \\
&\leq c\,(\nabla\tau) \int\limits_{B_r^+(x_0)} |u|^2 + |\nabla u|^2 \, dx \,,
\end{aligned}$$

wobei wir in der letzten Zeile die Young-Ungleichung benutzt haben.

b) Sei nun der Rand nahe x_0 nicht flach und durch $\gamma(x')$, $\gamma \in C^1$ beschrieben. Durch die Transformation $x \mapsto y = \Phi(x)$, wobei

$$\begin{aligned}
\Phi_i(x) &= y_i = x_i \,, \qquad i = 1, \dots, n-1 \,, \\
\Phi_n(x) &= y_n = x_n - \gamma(x') \,,
\end{aligned}$$

hat das Bild $\Phi(B_r(x_0) \cap \partial\Omega)$ einen flachen Rand nahe y_0 bzgl. der y-Koordinaten.



[1] Wir schreiben $x = (x_1, \dots, x_{n-1}, x_n) =: (x', x_n)$.

Sei $x = \Psi(y)$ die Umkehrabbildung. Wir haben $\det(\nabla_x \Phi) = \det(\nabla_y \Psi) = 1$. Somit gilt für $\tilde{u}(y) = u(\Psi(y))$ unter Berücksichtigung von a) und $\gamma \in C^1$

$$\begin{aligned}
\int\limits_{B_{r/2}(x_0)\cap\partial\Omega} |u|^2 \, dH_{n-1} &= \int\limits_{\Phi(B_{r/2}(x_0)\cap\partial\Omega)} |\tilde{u}|^2 \sqrt{1 + |\nabla_{y'}\gamma(y')|^2} \, dy' \\
&\le c \int\limits_{\Phi(B_r(x_0)\cap\Omega)} |\tilde{u}|^2 + |\nabla_y \tilde{u}|^2 \, dy \\
&\le c \int\limits_{B_r(x_0)\cap\Omega} |u|^2 + |\nabla_x u|^2 |\nabla_y \Psi(\Phi(x))|^2 \, dx \\
&\le c \int\limits_{B_r(x_0)\cap\Omega} |u|^2 + |\nabla u|^2 \, dx \, .
\end{aligned}$$

c) Da $\partial\Omega$ kompakt ist existieren endlich viele Punkte $x_0^i \in \partial\Omega$, $i = 1, \ldots, N$ so, dass $\partial\Omega = \cup_{i=1}^N \partial\Omega \cap B_{r^i/2}(x_0^i)$, wobei für jedes $i = 1, \ldots, N$ der Rand nahe x_0^i durch eine Funktion γ^i (siehe b)) beschrieben ist. Eine wiederholte Anwendung von b) liefert

$$\begin{aligned}
\int\limits_{\partial\Omega} |u|^2 \, dH_{n-1} &\le \sum_{i=1}^N \int\limits_{B_{r^i}(x_0^i)\cap\partial\Omega} |u|^2 \, dx \\
&\le c \sum_{i=1}^N \int\limits_{B_{r^i}(x_0^i)\cap\Omega} |u|^2 + |\nabla u|^2 \, dx \\
&\le c \int\limits_{\Omega} |u|^2 + |\nabla u|^2 \, dx \, ,
\end{aligned}$$

was gerade die Behauptung von Lemma 3.4 ist. ∎

$\tilde{R}$ lässt sich durch Abschliessung auf ganz $H^{1,2}(\Omega)$ zu einer beschränkten linearen Abbildung

$$R : H^{1,2}(\Omega) \to L^2(\partial\Omega)$$

fortsetzen. R heißt **Restriktions- oder Spuroperator**. Die Abbildung R wird verwendet, um Elementen von $H^{1,2}(\Omega)$, die eigentlich Klassen von Funktionen sind, die bis auf eine Menge vom Maß Null erklärt sind, dennoch eine Restriktion auf die Menge $\partial\Omega$, welche Mass Null hat, zuzuordnen. An Stelle der Voraussetzung, dass Ω einen Rand $\partial\Omega \in C^1$ hat, reicht es, zu verlangen, dass $\partial\Omega \in C^{0,1}$, d.h. Ω hat einen Lipschitz-stetigen Rand. Die Konstruktion von R geschieht folgendermaßen:

Zu $u \in H^{1,2}(\Omega)$ existieren Funktionen $u_j \in C^1(\overline{\Omega})$ mit $u_j \to u$ in $H^{1,2}(\Omega)$ $(j \to \infty)$. (Beweisbedürftig, da $u_j \in C^1(\overline{\Omega})$ und nicht bloß $u_j \in C^1(\Omega)$ verlangt wird - die Glattheit von $\partial\Omega$ wird verwendet. Siehe Evans S. 127 ff.) Wegen Lemma 3.4 gilt $\|\tilde{R}u_j - \tilde{R}u_k\|_{L^2(\partial\Omega)} \to 0$ $(j, k \to \infty)$, d.h. $(\tilde{R}u_k)$ ist eine Cauchyfolge mit Limes $v \in L^2(\partial\Omega)$. Man definiert nun $Ru = v$ und erhält

$$\|Ru\|_{L^2(\partial\Omega)} \leq K\|u\|_{H^{1,2}(\Omega)} \qquad \forall u \in H^{1,2}(\Omega)\,.$$

Es folgen nun einige Lösbarkeitssätze für lineare Gleichungen $Au = f$ mit beschränkten linearen Operatoren $A : H \to H$, wobei H ein Hilbertraum ist.

3.5 Satz. *Sei H ein Hilbertraum und $A : H \to H$ ein beschränkter linearer Operator. Es gelte die **Koerzitivitätsbedingung***

$$\mathcal{R}e(u, Au) \geq c_0\|u\|^2 \qquad \text{für alle } u \in H\,, \tag{3.6}$$

mit einer Konstanten $c_0 > 0$. Dann ist die Gleichung $Au = f$ für alle $f \in H$ eindeutig lösbar und die inverse Abbildung A^{-1} ist beschränkt.

Beweis : Der *Bildbereich* $A(H)$ ist abgeschlossen. In der Tat, aus (3.6) folgt $\|Au\| \geq c_0\|u\|$. Ist nun $Au_j \to z$, so folgt $c_0\|u_j - u_k\| \leq \|Au_j - Au_k\| \to 0$ $(j, k \to \infty)$, d.h. (u_j) ist eine Cauchyfolge mit Limes u. Aus der Stetigkeit von A und der Eindeutigkeit der Grenzwerte folgt $z = Au$. Wäre nun $A(H)$ ein echter Teilraum von H, so gäbe es ein Element $w \neq 0$, $w \perp A(H)$. Aus (3.6) folgt der Widerspruch

$$0 = \mathcal{R}e(w, Aw) \geq c_0\|w\|^2 > 0\,,$$

d.h. $A(H) = H$. Die Eindeutigkeit und die Stetigkeit der Inversen folgen ebenfalls aus der Ungleichung $\|Au - Au'\| \geq c_0\|u - u'\|$. ∎

Beispiel: $H = L^2(\Omega)$, $Au := u - \int\limits_\Omega K(x,y)\,u(y)\,dy$ unter der Voraussetzung

$$\int\limits_\Omega \int\limits_\Omega |K(x,y)|^2\,dx\,dy \leq q < 1\,.$$

Mit Hilfe der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung folgt

$$\Big|\Big(u, \int\limits_\Omega K(.,y)u(y)\,dy\Big)\Big| \leq \|u\|_{L^2}^2 \int\limits_\Omega \int\limits_\Omega |K|^2\,dx\,dy.$$

Die Konstante c_0 in (3.6) ist dann $1 - q$.

Eine der wichtigsten Anwendungen von Satz 3.5 liegt in der Theorie der elliptischen partiellen Differentialgleichungen. Hierzu benötigen wir den Begriff der beschränkten Bilinearform (bzw. Sesquilinearform) und das Lemma von Lax-Milgram.

3.7 Definition. *Eine **beschränkte Bilinearform (Sesquilinearform)** ist eine Abbildung $[\cdot,\cdot]$ von $H \times H$ nach $\mathbb{R}$ bzw. $\mathbb{C}$ mit den Eigenschaften*

(B1) **Bilinearität** *bzw.* **Sesquilinearität**, *d.h.*

$$[\alpha u + \beta v, w] = \alpha[u, w] + \beta[v, w]\,,$$
$$[u, \alpha v + \beta w] = \overline{\alpha}[u, v] + \overline{\beta}[u, w]\,,$$

für alle $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ bzw. $\mathbb{C}$ und alle $u, v, w \in H$.

(B2) **Beschränktheit**, *d.h. es existiert eine Konstante $K > 0$ mit*

$$\big|[u, v]\big| \leq K\|u\|\,\|v\|$$

für alle $u, v \in H$.

3.8 Definition. *Eine Bilinearform (Sesquilinearform) heißt **koerziv**, wenn eine Konstante $c_0 > 0$ existiert, so dass für alle $u \in H$ gilt:*

$$\mathcal{R}e[u, u] \geq c_0\|u\|^2\,.$$

Man beachte, dass wir keine Symmetrie für $[u, v]$ vorausgesetzt haben.

3.9 Lemma (Lax-Milgram). *Sei H ein Hilbertraum und $[\cdot,\cdot]$ eine koerzive, beschränkte Bilinearform (Sesquilinearform) auf H. Dann gibt es zu jedem beschränkten, linearen Funktional $f \in H^*$ ein eindeutiges $u \in H$ mit*

$$[v, u] = \langle f, v\rangle \text{ für alle } v \in H\,. \tag{3.10}$$

Beweis : Für jedes $u \in H$ definiert die Abbildung $\varphi_u(v) = [v, u]$ ein beschränktes, lineares Funktional auf H. Nach dem Rieszschen Darstellungssatz gibt es daher ein eindeutiges Element $A(u) \in H$ mit

$$[v, u] = \big(v, A(u)\big)\,.$$

Die Abbildung A ist linear, denn es gilt $\big(v, A(\lambda x+\beta y)\big) = \big(v, \lambda A(x)-\beta A(y)\big)$ für alle $v \in H$ und somit $A(\lambda x + \beta y) = \lambda A(x) - \beta A(y)$. Wir schreiben daher $A(u) = Au$. Da $[\cdot,\cdot]$ eine beschränkte Bilinearform (Sesquilinearform) ist, gilt $\|Au\|^2 = (Au, Au) = [Au, u] \leq K\|Au\|\,\|u\|$, woraus die Beschränktheit von A folgt. Schließlich ist $\mathcal{R}e(u, Au) = \mathcal{R}e[u, u] \geq c_0\|u\|^2$, d.h. A ist koerziv. Das lineare Funktional f stellen wir nach dem Rieszschen Darstellungssatz durch ein Element $f_0 \in H$ dar, d.h. $\langle f, v\rangle = (v, f_0)$. Die Gleichung (3.10) übersetzt sich daher in die Form

$$(v, Au) = (v, f_0) \qquad \text{für alle } v \in H\,,$$

oder, äquivalent,

$$Au = f_0 .$$

Da wir gezeigt haben, dass A linear, beschränkt und koerziv ist, folgt mit Satz 3.5 die eindeutige Lösbarkeit von (3.10). ■

Eine wichtige Anwendung des Lemmas von Lax-Milgram ist der Nachweis der Existenz von Lösungen $u : \Omega \to \mathbb{R}$ für elliptische Randwertprobleme der Gestalt

$$-\sum_{i,k=1}^{n} D_i\big(a_{ik}(x)D_k u\big) + c(x)u = f \qquad \text{in } \Omega \tag{3.11}$$

mit Randbedingungen für u auf $\partial\Omega$. Hierbei ist Ω ein Gebiet des $\mathbb{R}^n$ mit $\partial\Omega \in C^{0,1}$, $f \in L^2(\Omega)$, $a_{ik} \in L^\infty(\Omega), c \in L^\infty(\Omega)$, und es gilt die **Elliptizitätsbedingung**

$$\sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}(x)\,\xi_k\,\xi_i \geq \lambda_0|\xi|^2 \qquad \text{für alle } \xi \in \mathbb{R}^n, \text{ für fast alle } x \in \Omega \tag{3.12}$$

mit einer positiven Konstante λ_0 („Elliptizitätskonstante“). Ferner gelte für fast alle $x \in \Omega$[2]

$$c(x) \geq \lambda_1 > 0. \tag{3.13}$$

Wir setzen $H = H^{1,2}(\Omega, \mathbb{R})$ und definieren die Bilinearform $[\cdot,\cdot]$ auf $H \times H$ durch

$$[u, v] := \sum_{i,k=1}^{n} (a_{ik} D_k u, D_i v)_{L^2} + (c\,u, v)_{L^2} .$$

Man überlegt sich leicht, dass $[\cdot,\cdot]$ die Voraussetzungen des Lemmas von Lax-Milgram erfüllt. Ferner ist für $f \in L^2(\Omega)$ das durch $f(v) = (f, v)_{L^2}$ definierte Funktional auch auf $H^{1,2}(\Omega)$ beschränkt (es ist sogar als Funktional auf $L^2(\Omega)$ beschränkt). Nach dem Lemma von Lax-Milgram gibt es daher eine eindeutig bestimmte Funktion $u \in H^{1,2}(\Omega)$ mit

$$\sum_{i,k=1}^{n} (a_{ik}\, D_k u, D_i v)_{L^2} + (cu, v)_{L^2} = (f, v)_{L^2} \qquad \forall v \in H^{1,2}(\Omega)\,, \tag{3.14}$$

d.h. es *gibt eine schwache Lösung der elliptischen partiellen Differentialgleichung* (3.11). Um (3.14) zu interpretieren nimmt man an, dass u hinreichend glatt ist, z.B. $u \in C^2(\overline{\Omega})$, und macht man folgende Überlegungen: Offensichtlich ist $C_0^\infty(\Omega) \subset H^{1,2}(\Omega)$ und somit erhalten wir nach partieller Integration

$$-\sum_{i,k=1}^{n} \int_\Omega D_i\big(a_{ik}\, D_k u\big)\, v\, dx + \int_\Omega c\, u\, v\, dx = \int_\Omega f\, v\, dx\,, \quad \text{für alle } v \in C_0^\infty(\Omega)\,,$$

[2] Für Nullrandbedingungen könnte man $\lambda_1 = 0$ zulassen.

was sofort (3.11) fast überall in Ω liefert. Ausserdem folgt aus (3.14) noch die **natürliche Randbedingung** (man wähle $v \in C^\infty(\overline{\Omega})$, integriere partiell und benutze (3.11))

$$\sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}\, D_k u\, \nu_i = 0 \quad \text{auf } \partial\Omega,\ \nu = \text{ äusserer Normalenvektor.} \tag{3.15}$$

Somit sehen wir, dass die schwache Lösung u von (3.14) eine Lösung des „verallgemeinerten Neumann Problems“ (3.11), (3.15) ist. Statt $H^{1,2}(\Omega)$ lässt sich auch $H_0^{1,2}(\Omega)$ als Grundraum nehmen, (3.15) entfällt dann und die schwache Lösung $u \in H_0^{1,2}(\Omega)$ von (3.14) mit „$v \in H^{1,2}(\Omega)$“ ersetzt durch „$v \in H_0^{1,2}(\Omega)$“ ist eine Lösung des „verallgemeinerten Dirichlet Problems“ (3.11) mit $u = 0$ auf $\partial\Omega$.

3.16 Satz (Neumann Reihe). *Sei H ein Hilbertraum und $A : H \to H$ linear und beschränkt mit*

$$\|A\| \le q < 1\,. \tag{3.17}$$

Dann besitzt die Abbildung $I - A$ eine auf ganz H definierte, beschränkte Inverse.

Beweis : Wir wollen für beliebige $f \in H$ die Gleichung $(I - A)u = f$ lösen. Für die Folge $S_n f := \sum_{k=0}^{n} A^k f$ gilt:

$$\|S_n f - S_m f\| = \|\sum_{k=n+1}^{m} A^k f\| \le \sum_{k=n+1}^{m} \|A\|^k\, \|f\|\,.$$

Aufgrund von (3.17) ist $(S_n f)$ somit eine Cauchyfolge, deren Grenzwert wir mit $Sf := \lim_{n\to\infty} S_n f$ bezeichnen. Somit gilt

$$f - A^{n+1} f = (I - A)(S_n f).$$

Da $A^{n+1} f \to 0$ $(n \to \infty)$ erhalten wir $(I - A)Sf = f$, d.h. $(I - A)^{-1} = S$. Die Eindeutigkeit und Stetigkeit der Inversen folgt aus

$$\|u - Au\| \ge \|u\| - \|Au\| \ge \|u\|\,\big(1 - \|A\|\big) \ge (1 - q)\,\|u\|\,.$$

■

2.4 Adjungierte Operatoren

Wir wollen nun die Bildbereiche von linearen Operatoren charakterisieren. Dazu ist es nützlich adjungierte Operatoren einzuführen, wie das folgende Resultat aus dem $\mathbb{R}^n$ zeigt.

• Wenn $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ eine lineare Abbildung ist, so kann man A als Matrix auffassen, d.h. $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Um den Bildbereich von A zu charakterisieren, wollen wir wissen, wann das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ eine Lösung besitzt. Dazu geht man wie folgt vor:

$$(A|b) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & * & * & * & * & * \\ 0 & 1 & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 1 & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & * \end{array}\right) =: (\tilde{A}, \tilde{b})$$

$$Ax = b \,\text{ist lösbar} \Leftrightarrow \tilde{b_4} = \tilde{b_5} = 0.$$

Dies kann man auch anders formulieren: Die transponierte Matrix $\tilde{A}^T$ hat die Form

$$\tilde{A}^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & 1 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & 1 & 0 & 0 \\ * & * & * & 0 & 0 \\ * & * & * & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Wir sehen sofort: $\ker(\tilde{A}^T) = \operatorname{span}\{(0,0,0,1,0),(0,0,0,0,1)\}$ und es gilt:

$$Ax = b \text{ ist lösbar} \quad \Leftrightarrow \quad \forall\, y \in \ker(A^T) \text{ gilt: } (y,b) = 0$$

Das Analogon zu transponierten Matrizen sind adjungierte Operatoren, die wie folgt definiert werden:
Seien H_1, H_2 Hilberträume und $A : H_1 \to H_2$ ein beschränkter linearer Operator. Für jedes $u \in H_2$ wird durch $\varphi_u(v) := (Av, u)_{H_2}$ ein beschränktes lineares Funktional $\varphi_u : H_1 \to \mathbb{R}$ bzw. $\mathbb{C}$ definiert. Nach dem Rieszschen Darstellungssatz lässt sich φ_u durch ein Element aus H_1, welches wir mit A^*u bezeichnen, darstellen, d.h. für alle $u \in H_2,\ v \in H_1$ gilt:

$$(Av, u)_{H_2} = (v, A^*u)_{H_1}\,. \tag{4.1}$$

4.2 Definition. *Sei $A : H_1 \to H_2$ linear und beschränkt. Die vermöge (4.1) definierte Abbildung $A^* : H_2 \to H_1$ heißt der zu A* ***adjungierte Operator****.*

4.3 Satz. *A^* ist linear und beschränkt.*

Beweis : Wir haben für alle $u, w \in H_2$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ bzw. $\mathbb{C}$ und $v \in H_1$

$$\begin{aligned}\big(v, A^*(\alpha u + \beta w)\big)_{H_1} &= (Av, \alpha u + \beta w)_{H_2} = \bar{\alpha}(Av, u)_{H_2} + \bar{\beta}(Av, w)_{H_2} \\ &= \bar{\alpha}(v, A^*u)_{H_1} + \bar{\beta}(v, A^*w)_{H_1} = (v, \alpha A^*u + \beta A^*w)_{H_1}\end{aligned}$$

und also ist $A^*(\alpha u + \beta w) = \alpha A^* u + \beta A^* w$, d.h A^* ist linear. Um die Beschränktheit zu beweisen benutzt man:

$$|(v, A^* u)| = |(Av, u)| \le \|Av\| \, \|u\| \le \|A\| \, \|v\| \, \|u\| \,.$$

Da für alle Elemente eines Hilbertraumes gilt $\|w\| = \sup_{\|z\|=1} |(z, w)|$ (Übung), erhalten wir

$$\|A^* u\| = \sup_{\|v\|=1} |(v, A^* u)| \le \|A\| \, \|u\| \,,$$

d.h. A^* ist beschränkt. ∎

4.4 Satz. *Falls $A : H_1 \to H_2$ linear und beschränkt ist, gilt $A^{**} = A$. Ferner ist $\|A\| = \|A^*\|$.*

Beweis : Übungsaufgabe ∎

Beispiele von adjungierten Operatoren:

(i) $H_1 = H_2 = L^2(\Omega\,; \mathbb{C})$, Ω Gebiet im $\mathbb{R}^n$,

$$(Au)(x) := \int_\Omega K(x, y) \, u(y) \, dy$$

mit einem Kern $K \in L^2(\Omega \times \Omega\,; \mathbb{C})$. Es gilt

$$(A^* v)(y) = \int_\Omega \overline{K(x, y)} \, v(x) \, dx \,.$$

(ii) $H_1 = H_2 = L^2(\Omega\,; \mathbb{C})$, $(Au)(x) := g(x) \, u(x)$ mit $g \in L^\infty(\Omega\,; \mathbb{C})$. Dann gilt $A^* v(x) = \overline{g(x)} \, v(x)$.

(iii) $H_1 = H^{1,2}(I)$, $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$, $H_2 = L^2(I)$, $Au = u'$. Nach Definition ist $(u, A^* v)_{H_1} = (u', v)_{L^2}$ für alle $u \in H_1$, $v \in H_2$, d.h.

$$\big(u', (A^* v)'\big)_{L^2} + (u, A^* v)_{L^2} = (u', v)_{L^2} \,.$$

Wir verschieben die Inhomogenität der rechten Seite durch die Substitution $y(t) = A^* v(t) - \int_a^t v(s) \, ds$ und erhalten

$$\big(u', y'\big)_{L^2} + \Big(u, y + \int_a^t v(s) \, ds\Big)_{L^2} = 0 \,,$$

d.h. y ist schwache Lösung der Differentialgleichung

$$-y'' + y + \int_a^t v(s) \, ds = 0 \tag{4.5}$$

mit den natürlichen Randbedingungen $y'(a) = y'(b) = 0$. Diese Differentialgleichung lässt sich für gegebenes v in y lösen. $A^*v(t) = y(t) + \int_a^t v(s)\,ds$ ist dann die gewünschte Darstellung der adjungierten Abbildung. Offensichtlich ist bei dieser Wahl der Grundräume *nicht* $A^*v = -v'$, sondern aufgrund der verschiedenen Skalarprodukte ergibt sich ein komplizierterer Ausdruck, der linear in v ist.

Die adjungierte Abbildung ist von großer Bedeutung für die lineare Funktionalanalysis. Ein Beispiel ist der folgende *Alternativsatz*, den man aus der Linearen Algebra endlich-dimensionaler Räume kennt (siehe Einleitung des Abschnitts).

4.6 Satz. *Seien H_1, H_2 Hilberträume und $A : H_1 \to H_2$ ein linearer, beschränkter Operator mit abgeschlossenem Bildbereich $A(H_1)$. Dann ist*

$$H_2 = A(H_1) \oplus N(A^*)\,.$$

Hierbei ist $N(A^*)$ der Kern von A^*.

Beweis : Da $A(H_1)$ abgeschlossen ist, gilt nach dem Projektionssatz 2.2

$$H_2 = A(H_1) \oplus (A(H_1))^\perp\,,$$

d.h. jedes $z \in H_2$ besitzt eine eindeutige Darstellung

$$z = w + v\,, \quad w \in A(H_1)\,, \quad v \in (A(H_1))^\perp\,.$$

Wir wollen nun zeigen: $N(A^*) = (A(H_1))^\perp$, denn damit ist der Satz bewiesen.

„$\subseteq$“: Sei $y \in N(A^*)$. Dann ist $0 = (u, A^*y)_{H_1} = (Au, y)_{H_2}$ für alle $u \in H_1$, d.h. $y \in (A(H_1))^\perp$, also $N(A^*) \subset (A(H_1))^\perp$.

„$\supseteq$“: Sei umgekehrt $y \in (A(H_1))^\perp$. Dann ist $y \perp A(H_1)$ und $0 = (Av, y)_{H_2} = (v, A^*y)_{H_1}$ für alle $v \in H_1$. Daraus folgt $A^*y = 0$ und $y \in N(A^*)$, also $(A(H_1))^\perp \subset N(A^*)$. ∎

4.7 Folgerung (Fredholmsche Alternative). *Unter den Voraussetzungen von Satz 4.6 gilt: Die Gleichung $Au = f$ ist genau dann lösbar, wenn $f \perp N(A^*)$.*

Beweis :

„$\Leftarrow$“: Sei $f \perp N(A^*)$. Nach Satz 4.6 haben wir eine Zerlegung $f = f_1 + f_2$, $f_1 \in A(H_1)$, $f_2 \in N(A^*)$, $f_1 \perp f_2$. Somit ist $\|f - f_1\|^2 = (f_2, f - f_1) = 0$, d.h. $f = f_1 \in A(H_1)$, d.h. es gibt ein $u \in H_1$ mit $Au = f$.

„$\Rightarrow$“: Sei $f = Au$ und $v \in N(A^*)$. Dann haben wir $(f, v) = (Au, v) = (u, A^*v) = 0$, d.h. $f \perp N(A^*)$. ∎

Eine Anwendung der Fredholmschen Alternative werden wir in Abschnitt 2.7 behandeln. Im Moment fehlen uns dazu noch einige Resultate.

4.8 Adjungierte Abbildungen unbeschränkter Operatoren. Fasst man, wie in Beispiel (iii) von adjungierten Operatoren, die Differentation $Au = u'$ als beschränkte Abbildung von $H^{1,2}$ nach L^2 auf, so ergibt sich A^* als Lösung einer Differentialgleichung zweiter Ordnung, ist also relativ kompliziert. Eigentlich hätte man ja ganz gerne eine Theorie, in der $A^*u = -u'$ ist. Dies erreicht man, indem man lineare, nicht notwendig beschränkte Abbildungen betrachtet, die nicht auf dem gesamten zugrundeliegenden Hilbertraum erklärt sind.

Beispiel: *a*) Sei $H = L^2(0, 2\pi)$ und sei $A : D(A) \subseteq H \to H : \ u \mapsto u'$, wobei der Definitionsbereich $D(A) = C^\infty(0, 2\pi)$ ist. Dann ist A ein *unbeschränkter* Operator, denn für $u_n(x) = \sin nx \in C^\infty(0, 2\pi)$ gilt

$$\|u_n\|_{L^2}^2 = \pi, \qquad \|u_n'\|_{L^2}^2 = n^2\pi\,.$$

b) Sei $H = L^2(\mathbb{R})$ und sei $A : D(A) \subseteq H \to H : u \mapsto u'$ mit $D(A) = C_0^\infty(\mathbb{R})$. Dann ist A ein unbeschränkter Operator. Um dies einzusehen, sei $J \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ eine Funktion mit $J \geq 0, \int_{\mathbb{R}} J dx = 1$ und $\operatorname{supp} J \subset \overline{B_1(0)}$. Eine solche Funktion wird oft als *Glättungskern* bezeichnet, da mit Hilfe der aus Analysis III bekannten Faltung L^p-Funktionen durch glatte Funktionen approximiert werden können (Analysis III, Folgerung 15.6). Ein typisches Beispiel eines solchen Glättungskernes ist die Funktion

$$J(x) = \begin{cases} k \exp\left(\frac{-1}{1-|x|^2}\right), & \text{falls } |x| < 1 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

mit einer Normierungskonstante k. Für $u_n(x) = n^{\frac{1}{2}} J(nx)$, gilt

$$\|u_n\|_{L^2}^2 = \|J\|_{L^2}^2 \leq c\,, \qquad \|u_n'\|_{L^2}^2 = n^2 \,\|J'\|_{L^2}^2 \ \to \ \infty \quad (n \to \infty)\,.$$

In den Anwendungen der Funktionalanalysis ist der Definitionsbereich $D(A)$ zumeist nur dicht in H. Deshalb definiert man die adjungierte Abbildung wie folgt:

4.9 Definition. *Sei $A : D(A) \subseteq H \to H$ ein linearer Operator, wobei $D(A)$ ein linearer dichter Teilraum von H ist. Dann hat der* ***adjungierte Operator*** *$A^* : D(A^*) \subseteq H \to H$ den Definitionsbereich*

$$D(A^*) := \{v \in H \mid \varphi_v(u) = (Au, v) \text{ ist ein beschränktes lineares Funktional auf } D(A)\}\,.$$

A^*v ist dasjenige durch den Rieszschen Darstellungssatz gegebene Element von H, für welches

$$(u, A^*v) = (Au, v) \quad \text{für alle } u \in D(A)$$

gilt.

Zur Definition von φ_v in der $D(A^*)$ definierenden Gleichung muss beachtet werden: Zunächst ist φ_v nur auf $D(A)$ erklärt. Da aber für $v \in D(A^*)$ und $(u_j) \subseteq D(A)$ gilt

$$|\varphi_v(u_j - u_k)| = \big(A(u_j - u_k), v\big) \le K\|u_j - u_k\|\,, \tag{4.10}$$

lässt sich φ_v auf ganz H als beschränktes lineares Funktional fortsetzen. Ist $u \in H$ und nicht in $D(A)$, so gibt es, da $D(A)$ dicht in H ist, eine Folge $(u_j) \subset D(A)$ mit $u_j \to u$ in H und (u_j) ist Cauchyfolge. Wegen (4.10) konvergiert dann $\varphi_v(u_j)$ und der Limes wird als $\varphi_v(u)$ definiert. Die Definition ist unabhängig von der Folge (u_j), die gegen u geht. Auf das so *fortgesetzte lineare Funktional* wird der Rieszsche Darstellungssatz angewandt.

Beispiel: Sei $H = L^2(\mathbb{R})$ und sei $A : D(A) \subseteq H \to H :\ u \mapsto u'$, wobei $D(A) = C_0^\infty(\mathbb{R})$ ist. Sei $v \in D(A^*)$, d.h. $v \in L^2(\mathbb{R})$ und

$$|\varphi_v(u)| = |(u', v)| \le K_v\|u\|_{L^2} \qquad \text{für alle } u \in D(A)\,. \tag{4.11}$$

Aufgrund obiger Diskussion lässt sich φ_v auf ganz H fortsetzen, d.h. es existiert $f_v \in H^*$ mit $f_v|_{D(A)} = \varphi_v$. Der Rieszsche Darstellungssatz 3.1 impliziert die Existenz eines $w \in H$ mit

$$\langle f_v, u\rangle = (u, -w) \qquad \forall u \in H.$$

Für $u \in D(A)$ erhalten wir also

$$(u, -w) = \langle f_v, u\rangle = \langle \varphi_v, u\rangle = (u', v).$$

Nach Definition der schwachen Ableitung folgt $w = v' \in H$, d.h. $v \in H^{1,2}(\mathbb{R})$. Umgekehrt für $v \in H^{1,2}(\mathbb{R})$ gilt (4.11) trivialerweise. Daher gilt

$$D(A^*) = H^{1,2}(\mathbb{R})\,,$$

und wir erhalten

$$(u', v) = -(u, v')\,, \tag{4.12}$$

d.h. $A^*v = -v'$. (4.12) stimmt mit der üblichen Formel für partielle Integration überein, da die auftretenden Randterme wegfallen, wegen $u \in D(A)$, $v \in D(A^*)$.

4.13 Definition. *Ein linearer Operator $A : D(A) \subseteq H \to H$, wobei $D(A)$ ein linearer dichter Teilraum von H ist, heißt **selbstadjungiert**, wenn*

(i) $D(A) = D(A^*)$ *und*

(ii) $Au = A^*u$ *für alle $u \in D(A)$.*

Beispiel: Der **Laplace-Operator**

$$Au = -\Delta u := -\sum_{i=1}^{n} D_i^2 u = -\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} \tag{4.14}$$

ist bei geeignetem $D(A)$ als Operator $A : D(A) \subseteq L^2(\Omega) \to L^2(\Omega)$ selbstadjungiert. Zum Beweis benötigen wir einige Hilfsmittel.

4.15 Satz (Poincaré-Ungleichung). *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet. Dann gibt es eine Konstante $K > 0$, die nur von n und dem Durchmesser von Ω abhängt, so dass für alle $u \in H_0^{1,2}(\Omega)$ gilt:*

$$\|u\|^2_{H^{1,2}(\Omega)} \leq K \sum_{i=1}^{n} \|D_i u\|^2_{L^2(\Omega)} , \tag{4.16}$$

d.h. $\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}$ ist eine äquivalente Norm auf $H_0^{1,2}(\Omega)$.

Beweis : Da $C_0^\infty(\Omega)$-Funktionen dicht in $H_0^{1,2}(\Omega)$ und $L^2(\Omega)$ sind, reicht es (4.16) für solche Funktionen zu zeigen. Sei also $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$.

$$\begin{aligned} \|\varphi\|^2_{L^2} &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \int_\Omega |\varphi|^2 \, 1 \, dx = -\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \int_\Omega D_i(\varphi \, \varphi) x_i \, dx \\ &= -\frac{2}{n} \sum_{i=1}^{n} \int_\Omega \varphi D_i(\varphi) x_i \, dx . \end{aligned}$$

Sei $\Omega \subseteq \{x \in \mathbb{R}^n \bigm| |x_i| \leq d, i = 1, \ldots, n\}$. Dann erhalten wir mit der Hölder-Ungleichung

$$\|\varphi\|^2_{L^2} \leq \frac{2d}{n} \|\varphi\|_{L^2} \sum_{i=1}^{n} \|D_i \varphi\|_{L^2} ,$$

d.h.

$$\|\varphi\|_{L^2} \leq \frac{2d}{n} \sum_{i=1}^{n} \|D_i \varphi\|_{L^2} . \tag{4.17}$$

Wir erhalten also für $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$

$$\|\varphi\|^2_{H^{1,2}} = \|\varphi\|^2_{L^2} + \sum_{i=1}^{n} \|D_i \varphi\|^2_{L^2} \leq \left(\frac{4d^2}{n} + 1 \right) \sum_{i=1}^{n} \|D_i \varphi\|^2_{L^2} .$$

Für beliebige $u \in H_0^{1,2}(\Omega)$ nimmt man dann eine Folge $(u_j) \subseteq C_0^\infty(\Omega)$ mit $u_j \to u$ in $H_0^{1,2}(\Omega)$ und geht in der letzten Ungleichung zur Grenze $j \to \infty$. Dies beweist (4.16). ∎

Man kann auch noch folgende Version der Poincaré-Ungleichung beweisen. Allerdings benötigt man hierzu Hilfsmittel, die wir erst in Abschnitt 2.7 zur Verfügung haben.

4.18 Satz. *Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet mit $\partial\Omega \in C^{0,1}$. Dann existiert eine Konstante $K > 0$, so dass für alle $u \in H^{1,2}(\Omega)$ gilt:*

$$\int_\Omega |u - u_\Omega|^2 \, dx \leq K \int_\Omega |\nabla u|^2 \, dx \,, \tag{4.19}$$

wobei

$$u_\Omega := \fint_\Omega u \, dx := \frac{1}{|\Omega|} \int_\Omega u \, dx$$

der Mittelwert von u über Ω ist.

- *Insbesondere ist also $\|\nabla u\|_{L^2}$ eine äquivalente Norm auf*

$$\dot{H}^{1,2}(\Omega) := \{u \in H^{1,2}(\Omega) \mid u_\Omega = 0\} \,.$$

4.20 Die Räume $H^{k,2}(\Omega)$. Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet. Sei $k \in \mathbb{N}$ und $u \in L^2(\Omega)$. Man sagt u besitzt eine **schwache Ableitung k-ter Ordnung**, falls es Funktionen $D^\alpha u \in L^2(\Omega), \alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n), \alpha_i \in \mathbb{N}_0$, $|\alpha| := \sum_{i=1}^n \alpha_i = k$ gibt, so dass für alle $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ gilt:

$$(u, D^\alpha \varphi) = (-1)^k (D^\alpha u, \varphi) \,. \tag{4.21}$$

Man definiert dann $H^{k,2}(\Omega)$ als

$$H^{k,2}(\Omega) := \{u \in L^2(\Omega) \mid u \text{ besitzt schwache Ableitungen } D^\alpha u, |\alpha| \leq k\}$$

und definiert ein Skalarprodukt durch

$$(u, v)_{H^{k,2}(\Omega)} := \sum_{|\alpha| \leq k} (D^\alpha u, D^\alpha v)_{L^2} \,. \tag{4.22}$$

Oftmals sind Überlegungen einfacher, wenn man mit periodischen Funktionen arbeitet. Sei $Q = (-K, K)^n$ ein Würfel des $\mathbb{R}^n$ und sei $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine **periodische Funktion** mit Periode $2K$, d.h. $u(x + 2Ke_i) = u(x)$, $i = 1, \dots, n$, wobei e_i die Standardbasisvektoren sind. Wir bezeichnen mit $H^{k,2}_{\text{per}}(Q)$ den Teilraum von $H^{k,2}(Q)$ der periodischen Funktionen versehen mit dem $H^{k,2}(Q)$-Skalarprodukt. Hierbei wird die Konvention benutzt, dass $H^{0,2}(Q) := L^2(Q)$ ist. Mit $\dot{H}^{k,2}_{\text{per}}(Q)$ bezeichnen wir den Teilraum von $H^{k,2}_{\text{per}}(Q)$ bestehend aus Funktionen mit Mittelwert Null. Aufgrund von Satz 4.18 ist $\|\nabla u\|_{L^2}$ eine äquivalente Norm auf $\dot{H}^{1,2}_{\text{per}}(Q)$.

• Wir betrachten nun folgendes Problem für den Laplace-Operator: Sei $f \in L^2_{\mathrm{per}}(Q)$ gegeben. Wir suchen $u \in \dot{H}^{1,2}_{\mathrm{per}}(Q) \cap H^{2,2}_{\mathrm{per}}(Q)$ mit

$$-\Delta u = f \qquad \text{fast überall in } Q\,. \tag{4.23}$$

Um dies zeigen zu können, benötigen wir die Methode der **Differenzenquotienten**, die wir nun im allgemeinen Fall einführen. Für $-\frac{h_0}{2} < h < \frac{h_0}{2}$, $h_0 > 0$, wobei e_j, $j = 1, \ldots, n$, die Standardbasisvektoren des $\mathbb{R}^n$ sind, definieren wir durch

$$T_h(x) = T_{j,h}(x) := x + he_j \tag{4.24}$$

einen *Translationsoperator*. Für $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ mit $\partial\Omega \in C^{0,1}$ bezeichnen wir

$$\Omega_h := \{x \in \Omega \,\big|\, \operatorname{dist}(x, \partial\Omega) > h\}.$$

Das folgende Lemma zeigt den Zusammenhang zwischen dem klassischen Differenzenquotienten und den schwachen Ableitungen auf.

4.25 Lemma. *Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Gebiet mit $\partial\Omega \in C^{0,1}$ und $u \in L^2(\Omega)$.*

(a) *Für $u \in H^{1,2}(\Omega)$ und $|h| \le h_0$ gilt:*

$$\big\|h^{-1}(u \circ T_{j,h} - u)\big\|_{L^2(\Omega_h)} \le \|D_j u\|_{L^2(\Omega)}\,, \quad j = 1, \ldots, n\,.$$

(b) *Seien $h^{-1}(u \circ T_{j,h} - u) \in L^2(\Omega_{h_0})$ für alle $h_0 > 0$, $0 < h < h_0$ und gelte*

$$\big\|h^{-1}(u \circ T_{j,h} - u)\big\|_{L^2(\Omega_h)} \le C_1, \quad j = 1, \ldots, n.$$

Dann existiert die verallgemeinerte Ableitung $D_j u$ und es gilt

$$\|D_j u\|_{L^2(\Omega)} \le C_1\,.$$

Beweis : (a) Da $C^1(\Omega)$ Funktionen dicht in $H^{1,2}(\Omega)$ sind reicht es die Ungleichung für solche Funktionen zu beweisen. Sei also $u \in C^1(\Omega)$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega_h} \big|h^{-1}(u(T_{j,h}(x)) - u(x))\big|^2\,dx &= \int_{\Omega_h} \Big|\int_0^1 D_j u(x + the_j)\,dt\Big|^2\,dx \\
&\le \int_{\Omega_h}\int_0^1 |D_j u(x + the_j)|^2\,dtdx \\
&\le \int_0^1 dt \int_\Omega |D_j u(y)|^2\,dy\,,
\end{aligned}$$

was die Behauptung ist.
(b) Hierfür fehlen uns noch einige Hilfsmittel (siehe Abschnitt 2.7). ■

4.26 Lemma. *Für alle $f \in L^2_{\text{per}}(Q)$ existiert genau eine Lösung $u \in \dot{H}^{1,2}_{\text{per}}(Q) \cap H^{2,2}_{\text{per}}(Q)$ des Problems (4.23). Diese Lösung erfüllt die Abschätzung*

$$\|u\|_{H^{2,2}} \le K \|f\|_{L^2} , \tag{4.27}$$

wobei die Konstante $K > 0$ nicht von f abhängt.

Beweis : Wir setzen

$$[u, v] := \sum_{i=1}^{n} \int_Q D_i u D_i v \, dx, \quad \langle F, v \rangle := \int_Q f v \, dx \, . \tag{4.28}$$

Dann ist F ein beschränktes lineares Funktional auf $\dot{H}^{1,2}_{\text{per}}(Q)$ und es gilt

$$[u, u] \ge \sum_{i=1}^{n} \|D_i u\|^2_{L^2} \ge c \|u\|^2_{H^{1,2}}$$

aufgrund der Bemerkungen nach Satz 8.15. Dies und die Hölder Ungleichung liefern, dass $[\cdot, \cdot]$ eine koerzive, beschränkte Bilinearform auf $\dot{H}^{1,2}_{\text{per}}(Q)$ ist. Das Lemma von Max-Milgram (Lemma 3.9) liefert die Existenz einer eindeutigen schwachen Lösung $u \in \dot{H}^{1,2}_{\text{per}}(Q)$ des Problems

$$[u, v] = \langle F, v \rangle \qquad \forall v \in \dot{H}^{1,2}_{\text{per}}(Q) \, . \tag{4.29}$$

Um zu zeigen, dass die Lösung u auch in $H^{2,2}_{\text{per}}(Q)$ liegt, benutzen wir Lemma 4.25. Wir führen die für den Differenzenquotienten üblche Kurzschreibweise ein:

$$\Delta^h_j u(x) := h^{-1}(u(T_{j,h}(x)) - u(x))$$

$\Delta^h_j u(x)$ ist wiederum eine Funktion aus $\dot{H}^{1,2}_{\text{per}}(Q)$. Somit können wir in (4.29) als Testfunktion $v = h^{-1} \Delta^h_j u(x)$ wählen und erhalten

$$\begin{aligned} &\frac{1}{h^2} \int_Q \sum_{i=1}^{n} D_i \left(u(x)\right) D_i \big(u(T_h(x)) - u(x)\big) \, dx \\ &= \frac{1}{h^2} \int_Q f(x) \big(u(T_h(x)) - u(x)\big) \, dx \, . \end{aligned}$$

Wenn man $v = h^{-1}\Delta_j^{-h}u := h^{-2}(u(x) - u(T_{-h}(x))$ als Testfunktion wählt und $y = x - he_j$ substituiert erhält man

$$\begin{aligned}\frac{1}{h^2}\int_Q \sum_{i=1}^n D_i\big(u(T_h(x))\big)D_i\big(u(T_h(x)) - u(x)\big)\,dx \\ = \frac{1}{h^2}\int_Q f(T_h(x))\big(u(T_h(x)) - u(x)\big)\,dx\,,\end{aligned}$$

wobei man noch ausnutzt, das aufgrund der Periodizität die Integrale über Q bzw. über $\{x + he_j \mid x \in Q\}$ gleich sind. Diese beiden Gleichungen voneinander abgezogen liefern

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^n \int_Q \left|D_i\Delta_j^h u(x)\right|^2\,dx &= \frac{1}{h^2}\int_Q \big(f(T_h(x)) - f(x)\big)\big(u(T_h(x)) - u(x)\big)\,dx \\ &= \frac{-1}{h^2}\int_Q f(x)\big(u(T_h(x)) - 2u(x) + u(T_{-h}(x))\big)\,.\end{aligned} \tag{4.30}$$

Mit der Bezeichnung $\varphi(x) = \Delta_j^h u(x)$ kann man den letzten Term schreiben als

$$-\frac{1}{h}\int_Q f(x)\big(\varphi(x) - \varphi(T_{-h}(x))\big)\,dx \le \|f\|_{L^2}\left\|h^{-1}(\varphi - \varphi\circ T_{-h})\right\|_{L^2}\,.$$

Unter Benutzung von Lemma 4.25 (a) und der Young-Ungleichung kann man die rechte Seite durch

$$\frac{1}{2}\|f\|_{L^2}^2 + \frac{1}{2}\left\|\nabla\Delta_j^h u\right\|_{L^2}^2$$

abschätzen. Dies zusammen mit (4.30) ergibt

$$\left\|\nabla\Delta_j^h u\right\|_{L^2}^2 \le c\,\|f\|_{L^2}^2\,.$$

Lemma 4.25 (b) liefert nun

$$\sum_{j=1}^n \|D_j\nabla u\|_{L^2}^2 \le c\,\|f\|_{L^2}^2\,,$$

d.h. $u \in H^{2,2}_{\mathrm{per}}(Q)$. Dies zusammen mit (4.29) für $v \in C^\infty_{\mathrm{per}}(\Omega)$ liefert

$$-\sum_{i=1}^n \int_Q D_i^2 uv\,dx = \int_Q fv\,dx\,,$$

woraus man sofort (4.23) fast überall folgert. ∎

Man kann auch das Analogon zu Lemma 4.26 für das Dirichlet Problem für den Laplace Operator beweisen. Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet mit $\partial\Omega \in C^{1,1}$. Für $f \in L^2(\Omega)$ suchen wir eine Lösung von

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f \qquad \text{in } \Omega\,, \\ u &= 0 \qquad \text{auf } \partial\Omega\,. \end{aligned} \tag{4.31}$$

Man erhält folgende Aussage: Für alle $f \in L^2(\Omega)$ existiert genau eine Lösung $u \in H_0^{1,2}(\Omega) \cap H^{2,2}(\Omega)$ von (4.31) mit

$$\|u\|_{H^{2,2}(\Omega)} \leq c\,\|f\|_{L^2(\Omega)}\ . \tag{4.32}$$

Der Beweis der Existenz einer schwachen Lösung in $H_0^{1,2}(\Omega)$ läuft völlig analog. Zum Beweis der $H^{2,2}(\Omega)$ Regularität geht man auch analog vor. Allerdings muss man eine Testfunktion nehmen, die in $H_0^{1,2}(\Omega)$ liegt, was im Allgemeinen für $u(T_h(x)) - u(x)$ nicht gilt (die Funktion hat keine Nullrandwerte). Also muss man die Argumentation lokalisieren, d.h sei $\Omega' \subseteq\subseteq \Omega$ und $\tau \in C_0^\infty(\Omega)$ mit $\tau = 1$ in Ω' und $|\nabla\tau| \leq c\ \mathrm{dist}(\Omega', \mathbb{R}^n \setminus \Omega)^{-1}$. Man wählt dann $v(x) = h^{-2}(u(T(x)) - u(x))\tau^2$ und erhält bei etwas mehr technischem Aufwand:

$$\sum_{j=1}^{n} \int_{\Omega'} \left|\Delta_j^h \nabla u\right|^2 dx \leq c(\tau)\,\|f\|^2_{L^2(\Omega)}\,,$$

was sofort mit Lemma 4.25 (b) $\nabla^2 u \in L^2(\Omega')$ liefert. Um eine analoge Aussage nahe dem Rand $\partial\Omega$ zu erhalten kann man mit lokalen Koordinaten, die dem Rand angepasst sind argumentieren (siehe Alt S. 398). Dies ist etwas aufwendiger, funktioniert aber im Prinzip ähnlich wie die Aussage im Innern. Eine Kombination beider Abschätzungen liefert dann (4.32).

4.33 Satz. *Der Laplace-Operator $A : D(A) \subseteq \dot{L}^2_{\mathrm{per}}(Q) \to \dot{L}^2_{\mathrm{per}}(Q)$: $u \mapsto -\Delta u$ mit $D(A) = \dot{H}^{2,2}_{\mathrm{per}}(Q)$ ist selbstadjungiert.*

Beweis : Für glatte Funktionen u, v gilt

$$-\int_Q \Delta u v\, dx = \sum_{i=1}^{h} \int_Q D_i u D_i v\, dx = -\int_Q u \Delta v\, dx\,, \tag{4.34}$$

wobei die Randterme aufgrund der Periodizität wegfallen. Für Funktionen $u, v \in \dot{C}^\infty_{\mathrm{per}}(Q) := \{u \in C^\infty(\mathbb{R}^n) \mid u \text{ ist periodisch und } \fint_\Omega u dx = 0\}$ gilt somit $(Au, v) = (u, Av)$, d.h. für glatte Funktionen v gilt $Av = A^*v$. Da $\dot{C}^\infty_{\mathrm{per}}$-Funktionen dicht in $\dot{H}^{2,2}_{\mathrm{per}}(Q)$ sind und alle auftretenden Integrale endlich sind, gilt (4.34) für alle $u, v \in \dot{H}^{2,2}_{\text{per}}(Q)$. Sei nun $v \in \dot{H}^{2,2}_{\text{per}}(Q)$, dann gilt aufgrund von (4.34) für alle $u \in \dot{H}^{2,2}_{\text{per}}(Q)$

$$|(Au, v)| \le \|u\|_{L^2} \|v\|_{H^{2,2}} \,,$$

d.h. nach der Definition von A^* ist $v \in D(A^*)$ und es gilt[3]

$$(Au, v) = (u, Av) \,. \tag{4.35}$$

Dies liefert $A^*v = Av$, d.h. $A = A^*$ auf $\dot{H}^{2,2}_{\text{per}}(Q)$ und $\dot{H}^{2,2}_{\text{per}}(Q) = D(A) \subseteq D(A^*)$. Es bleibt zu zeigen, dass $D(A^*) = D(A)$. Sei $v \in D(A^*)$. Dann existiert nach Definition ein $A^*v = f \in \dot{L}^2_{\text{per}}$ mit

$$(Au, v) = (u, f) \qquad \forall u \in D(A) \,.$$

Nach Lemma 4.26 existiert für $f \in L^2_{\text{per}}(Q)$ eine eindeutige Lösung $\tilde{v} \in \dot{H}^{2,2}_{\text{per}}(Q)$ der Gleichung $A\tilde{v} = f$. Wir wollen zeigen, dass $v = \tilde{v}$. Sei $g \in L^2_{\text{per}}(Q)$ beliebig. Aufgrund von Lemma 4.26 existiert ein $\tilde{u} \in \dot{H}^{2,2}_{\text{per}}(Q)$ mit $A\tilde{u} = g$. Wir haben

$$\begin{aligned}(g, v - \tilde{v}) &= (A\tilde{u}, v) - (A\tilde{u}, \tilde{v}) = (\tilde{u}, f) - (\tilde{u}, A\tilde{v}) \\ &= (\tilde{u}, f) - (\tilde{u}, f) = 0 \,,\end{aligned}$$

wobei wir (4.35) und $A\tilde{v} = f$ benutzt haben. Somit ist $v = \tilde{v} \in D(A)$, d.h. $D(A^*) \subseteq D(A)$. ■

Im Falle von Nullrandbedingungen geht man analog vor.

4.36 Satz. *Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet mit $\partial\Omega \in C^{1,1}$. Der Laplace-Operator $A : D(A) \subseteq L^2(\Omega) \to L^2(\Omega)$ mit $D(A) = H^{1,2}_0(\Omega) \cap H^{2,2}(\Omega)$ ist selbstadjungiert.*

BEWEIS : Der Beweis läuft völlig analog zum Beweis von Satz 4.33. Man muss nur beim Beweis von (4.35) beachten, dass die Randterme wegfallen, da $u, v \in H^{1,2}_0(\Omega)$. ■

2.5 Separable Hilberträume und Orthogonalsysteme

[3] Die Wahl $v = 1$ liefert sofort, dass Au Mittelwert Null hat.

5.1 Definition. *Ein* ***Orthogonalsystem*** *ist eine Menge* $\{\, \varphi_j \in H \,\big|\, j \in \mathbb{N}\,, \varphi_j \neq 0 \,\}$ *mit*

$$(\varphi_k, \varphi_j) = 0 \quad \forall j \neq k\,.$$

Das Orthogonalsystem heißt ***Orthonormalsystem****, wenn zusätzlich* $\|\varphi_j\| = 1,\ j \in \mathbb{N}$*. Ein Orthogonalsystem heißt* ***vollständig*** *in* H*, wenn* $\operatorname{span}\{\, \varphi_j \,\big|\, j \in \mathbb{N} \,\}$ *dicht in* H *ist. Hierbei ist* $\operatorname{span}\{\varphi_j \,\big|\, j \in \mathbb{N}\}$ *die Menge der endlichen Linearkombinationen von beliebigen Elementen aus dem System, d.h.*

$$\operatorname{span}\{\varphi_j \,\big|\, j \in \mathbb{N}\} := \left\{ \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \varphi_j \,\Big|\, \alpha_j \in \mathbb{R} \textit{ bzw. } \mathbb{C}, j = 1, \dots, n \right\}.$$

5.2 Lemma. *Sei* $M = \{\, v_j \in H \,\big|\, j \in \mathbb{N} \,\}$*. Dann gibt es Orthonormalsysteme* $\{\, \varphi_j \in H \,\big|\, j \in \mathbb{N},\ \varphi_j \neq 0 \,\}$ *mit* $\operatorname{span} M = \operatorname{span}\{\varphi_j \,\big|\, j \in \mathbb{N}\}$*.*

Beweis : Man führt einen Orthogonalisierungsprozess durch. O.B.d.A. dürfen wir annehmen, dass für jedes N die Elemente $v_1, v_2, \dots, v_N$ linear unabhängig sind. Setze

$$\varphi_1 := \frac{v_1}{\|v_1\|}$$

Sei φ_j schon konstruiert. Man setze

$$\tilde{\varphi}_{j+1} := v_{j+1} - \sum_{l=1}^{j} (v_{j+1}, \varphi_l)\, \varphi_l\,, \qquad \varphi_{j+1} := \frac{\tilde{\varphi}_{j+1}}{\|\tilde{\varphi}_{j+1}\|}\,.$$

Offensichtlich ist $\varphi_{j+1} \perp \varphi_l,\ 1 \leq l \leq j$. Damit sind die φ_j durch vollständige Induktion definiert. Durch die Konstruktion erreicht man $\operatorname{span}\{\, \varphi_j \,\big|\, j \in \mathbb{N} \,\} = \operatorname{span}\{M\}$. ■

5.3 Satz. *Jeder separable Hilbertraum* H *besitzt ein vollständiges Orthonormalsystem.*

Beweis : Aus der Definition 5.1 und Lemma 5.2 folgt offensichtlich die Behauptung, denn da H separabel ist, gibt es ein System $\{v_j \,\big|\, j \in \mathbb{N}\}$, so dass $\overline{\operatorname{span}\{v_j \,\big|\, j \in \mathbb{N}\}}^{H} = H$. ■

5.4 Lemma. *Sei* $\{\varphi_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ *ein Orthonormalsystem in einem Hilbertraum* H*. Dann ist für jedes* $w \in H,\ N \in \mathbb{N}$

$$\Big\| \sum_{j=1}^{N} (w, \varphi_j)\, \varphi_j \Big\|^2 = \sum_{j=1}^{N} |(w, \varphi_j)|^2 \leq \|w\|^2\,.$$

Somit gilt auch $\sum_{j=1}^{\infty} |(w, \varphi_j)|^2 \leq \|w\|^2 < \infty$*.*

Beweis : Es gilt

$$\begin{aligned}
0 &\leq \Big\| w - \sum_{j=1}^{N} (w, \varphi_j)\, \varphi_j \Big\|^2 \\
&= \|w\|^2 + \sum_{j=1}^{N} |(w, \varphi_j)|^2 - \sum_{j=1}^{N} \Big\{ \big(w, (w, \varphi_j)\, \varphi_j\big) + \big((w, \varphi_j)\, \varphi_j, w\big) \Big\} \\
&= \|w\|^2 + \sum_{j=1}^{N} |(w, \varphi_j)|^2 - \sum_{j=1}^{N} \Big\{ \overline{(w, \varphi_j)}\, (w, \varphi_j) + (w, \varphi_j)\, \overline{(w, \varphi_j)} \Big\} \\
&= \|w\|^2 - \sum_{j=1}^{N} |(w, \varphi_j)|^2 \,.
\end{aligned}$$

Hieraus folgen die Aussagen des Lemmas. ∎

5.5 Satz. *Sei $\{\varphi_j\}$ ein vollständiges Orthonormalsystem in einem Hilbertraum H. Dann lässt sich jedes Element $u \in H$ als konvergente, **verallgemeinerte Fourierreihe***

$$u = \sum_{j=1}^{\infty} (u, \varphi_j)\, \varphi_j \tag{5.6}$$

darstellen und es gilt

$$\|u\|^2 = \sum_{j=1}^{\infty} |(u, \varphi_j)|^2 \,. \tag{5.7}$$

Beweis : Nach Definition 5.1 gibt es zu $u \in H$ eine Folge $u^N = \sum_{j=1}^{N} \mu_j^N \varphi_j \to u \in H$. Es ist $\mu_j^N = (u^N, \varphi_j)$, wie man sich durch Multiplikation im Sinne des Skalarproduktes mit φ_j überlegt. Es gilt wegen Lemma 5.4

$$\Big\| \sum_{j=1}^{N} (u, \varphi_j)\, \varphi_j - u^N \Big\|^2 = \Big\| \sum_{j=1}^{N} (u - u^N, \varphi_j)\, \varphi_j \Big\|^2 \le \big\| u - u^N \big\|^2 .$$

Da $u^N \to u$, folgt somit

$$\Big\| \sum_{j=1}^{N} (u, \varphi_j)\, \varphi_j - u \Big\|^2 \to 0 \quad (N \to \infty)\,, \tag{5.8}$$

was (5.6) beweist. Aus (5.8) folgt

$$\sum_{j=1}^{N} |(u, \varphi_j)|^2 - \sum_{j=1}^{N} (u, \varphi_j)\, (\varphi_j, u) - \sum_{j=1}^{N} (u, \varphi_j)\, \overline{(u, \varphi_j)} + \|u\|^2 \to 0\,,$$

d.h.

$$\|u\|^2 - \sum_{j=1}^{N} |(u, \varphi_j)|^2 \to 0 \qquad (N \to \infty)\,.$$

Damit ist (5.7) bewiesen. ∎

Man kann sich überlegen, dass die Vollständigkeit eines Orthonormalsystems äquivalent zu Relation (5.7) ist.

5.9 Lemma. *Sei $\{\varphi_j\}$ ein Orthonormalsystem in einem Hilbertraum H. Wenn für alle $u \in H$ gilt:*

$$\|u\|^2 = \sum_{j=1}^{\infty} |(u, \varphi_j)|^2 \,,$$

dann ist $\{\varphi_j\}$ ein vollständiges Orthonormalsystem.

Beweis : Sei $u \in H$. Im Beweis von Lemma 5.4 haben wir gezeigt:

$$\left\| u - \sum_{j=1}^{n} (u, \varphi_j)\varphi_j \right\|^2 = \|u\|^2 - \sum_{j=1}^{n} |(u, \varphi_j)|^2 \, .$$

Nach Voraussetzung konvergiert die rechte Seite gegen Null, d.h.

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{j=1}^{n} (u, \varphi_j)\varphi_j = u$$

und somit ist $\operatorname{span}\{\varphi_j \,\big|\, j \in \mathbb{N}\}$ dicht in H. ∎

Die **verallgemeinerten Fourierkoeffizienten** (u, φ_j) besitzen eine *Minimaleigenschaft*. Die Lösung des Minimumproblems „Suche $\mu_1, \ldots, \mu_N \in \mathbb{R}$ bzw. $\mathbb{C}$, so dass

$$\|u - \sum_{j=1}^{N} \mu_j \varphi_j\|^2$$

minimal ist“ lautet $\mu_j = (u, \varphi_j)$. In der Tat haben wir für $\mu_j \in \mathbb{R}$ bzw. $\mathbb{C}$, $j = 1, \ldots, N$

$$\begin{aligned} \left\| u - \sum_{j=1}^{N} \mu_j \varphi_j \right\|^2 &= \|u\|^2 + \sum_{j=1}^{N} |\mu_j|^2 - \sum_{j=1}^{N} \overline{\mu_j}(u, \varphi_j) - \sum_{j=1}^{N} \mu_j \overline{(u, \varphi_j)} \\ &\geq \|u\|^2 - \sum_{j=1}^{N} |(u, \varphi_j)|^2 \, , \end{aligned}$$

da $\overline{a}b + a\overline{b} \leq |a|^2 + |b|^2$. Somit ist die rechte Seite eine untere Schranke, die unabhängig von μ_j ist und für $\mu_j = (u, \varphi_j)$ angenommen wird, d.h. für $\mu_j = (u, \varphi_j)$ wird das Minimum von $\|u - \sum_{j=1}^{N} \mu_j \varphi_j\|^2$ angenommen.

Beispiel: Das System

$$\{(2\pi)^{-\frac{1}{2}} e^{ikx}\}_{k \in \mathbb{Z}} \tag{5.10}$$

ist ein Orthonormalsystem in $L^2((-\pi, \pi); \mathbb{C})$. In der Tat haben wir

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{imx} \, dx = \frac{e^{im\pi} - e^{-im\pi}}{im} = 0 \qquad m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} \, .$$

Aufgrund der Relation

$$\cos mx = \frac{e^{imx} + e^{-imx}}{2}, \quad \sin mx = \frac{e^{imx} - e^{-imx}}{2i} \tag{5.11}$$

ist auch das System

$$\{(2\pi)^{-\frac{1}{2}}, \pi^{-\frac{1}{2}} \cos nx, \pi^{-\frac{1}{2}} \sin nx\}_{n \in \mathbb{N}} \tag{5.12}$$

ein Orthonormalsystem in $L^2((-\pi, \pi); \mathbb{R})$.

5.13 Satz. *Die Systeme (5.10) bzw. (5.12) sind vollständige Orthonormalsysteme im $L^2_{\text{per}}((-\pi, \pi); \mathbb{C})$ bzw. $L^2_{\text{per}}((-\pi, \pi); \mathbb{R})$.*

Beweis : Aufgrund der Beziehung (5.11) genügt es dies für eines der Systeme zu zeigen. Wir nehmen das System (5.10). Wir wissen bereits, dass das System (5.10) ein Orthonormalsystem ist. Da $C^\infty_{\text{per}}[-\pi, \pi]$ dicht in $L^2_{\text{per}}(-\pi, \pi)$ ist, reicht es zu zeigen, dass sich glatte Funktionen durch endliche Linearkombinationen von Funktionen aus (5.10), die wir mit $l_k := (2\pi)^{-1/2} e^{ikx}$ bezeichnen, approximieren lassen. Sei also $f \in C^1_{\text{per}}[-\pi, \pi]$ und

$$P_n(f) := \sum_{|k| \leq n} (f, l_k) l_k \,.$$

Nach Lemma 5.4 gilt

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} |(f, l_k)|^2 \leq \|f\|^2_{L^2} < \infty \,,$$

und also für $m > n$

$$\|P_m(f) - P_n(f)\|^2_{L^2} \leq \sum_{|k| > n} |(f, l_k)|^2 \to 0 \qquad (n \to \infty) \,.$$

Somit ist $\big(P_n(f)\big)$ eine Cauchyfolge in $L^2_{\text{per}}(-\pi, \pi)$ und es existiert ein $\tilde{f} \in L^2_{\text{per}}(-\pi, \pi)$ so, dass $P_n(f) \to \tilde{f}$ in $L^2_{\text{per}}(-\pi, \pi)$ und für eine Teilfolge $P_{n_k}(f)(x) \to \tilde{f}(x)$ fast überall. Aufgrund des folgenden Lemmas erhalten wir $f = \tilde{f}$, was die Dichtheit von $\operatorname{span}\{l_k \,\big|\, k \in \mathbb{Z}\}$ in $L^2_{\text{per}}(-\pi, \pi)$ beweist. ∎

5.14 Lemma. *Sei $f \in L^2_{\text{per}}(-\pi, \pi)$ und existieren $M, \alpha > 0$ so, dass für fast alle $x \in (-\pi, \pi)$ und alle $|h| < \alpha$ gilt*

$$\big|h^{-1}\big(f(x+h) - f(x)\big)\big| \leq M \,. \tag{*}$$

Dann konvergieren die n-ten Partialsummen $P_n(f)$ fast überall gegen f.

- Das Lemma ist insbesondere für Lipschitz-stetige Funktionen anwendbar. Dann gilt die Aussage für jeden Punkt $x \in (-\pi, \pi)$, in dem (*) erfüllt ist.
- Falls (*) nur in einem Intervall $(a, b) \subset (-\pi, \pi)$ gilt, dann gilt die Aussage auch nur in diesem Intervall.

Beweis : Wir haben

$$
\begin{aligned}
P_n(f)(x) - f(x) &= \sum_{|k|\le n} (f - f(x), l_k) l_k(x) \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \big(f(y) - f(x)\big) \sum_{|k|\le n} e^{-iky}\, dy\, e^{ikx} \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \big(f(x-z) - f(x)\big) \sum_{|k|\le n} e^{ikz}\, dz \\
&= \frac{1}{\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \big(f(x-2y) - f(x)\big) \sum_{|k|\le n} e^{ik2y}\, dy\,,
\end{aligned}
$$

wobei wir erst $z = x - y$ und dann $z = 2y$ substituiert haben. Mit Hilfe der Summenformel der geometrischen Reihe erhält man

$$
\begin{aligned}
\sum_{|k|\le n} e^{ikx} &= e^{-inx} \sum_{k=0}^{2n} e^{ikx} = e^{-inx} \frac{1 - e^{ix(2n+1)}}{1 - e^{ix}} \\
&= \frac{e^{ix(n+\frac{1}{2})} - e^{-ix(n+\frac{1}{2})}}{e^{\frac{ix}{2}} - e^{-\frac{ix}{2}}} = \frac{\sin((n+\frac{1}{2})x)}{\sin\frac{x}{2}}\,,
\end{aligned}
$$

und somit

$$
P_n(f)(x) - f(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{f(x-2y) - f(x)}{2y} \frac{2y}{\sin y} \sin((2n+1)y)\, dy\,,
$$

d.h. $P_n(f)(x) - f(x)$ ist ein Fourierkoeffizient bzgl. des Systems (5.12) der Funktion

$$
g(y) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \chi_{[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]}(y) \frac{f(x-2y) - f(x)}{2y} \frac{2y}{\sin y}\,,
$$

welche aufgrund der Voraussetzungen eine L^2-Funktion ist. Lemma 5.4 liefert also $P_n(f)(x) - f(x) \to 0$ für $(n \to \infty)$, was die Behauptung ist. ■

Mit Hilfe eines vollständigen Orthonormalsystems in $L^2_{\text{per}}(-\pi,\pi)$ kann man vollständige Orthonormalsysteme in $L^2_{\text{per}}(Q), Q = (-L,L)^n \subseteq \mathbb{R}^n$ konstruieren. Das System

$$
l_k(x) = (2L)^{-\frac{1}{2}} e^{i\frac{\pi}{L}kx}, \quad k \in \mathbb{Z} \tag{5.15}
$$

ist ein vollständiges Orthonormalsystem in $L^2_{\text{per}}(-L,L)$.

5.16 Folgerung. *Das System*

$$(2L)^{-\frac{n}{2}} e^{i\frac{\pi}{L}k\cdot x}\,, \tag{5.17}$$

wobei $k = (k_1, \dots, k_n), k_i \in \mathbb{Z}, i = 1, \dots, n$, *ein Multiindex ist, und* $x = (x_1, \dots, x_n)$ *ein Vektor im* $\mathbb{R}^n$, *ist ein vollständiges Orthonormalsystem in* $L^2_{\text{per}}(Q)$, *wobei* $Q = (-L, L)^n$.

Beweis : Übung ■

5.18 Satz. *Jeder unendlich-dimensional separable Hilbertraum ist isometrisch-isomorph zum Hilbertraum* ℓ^2.

Beweis : Sei $\{\varphi_j\}$ ein vollständiges Orthonormalsystem in H. Jedes $u \in H$ besitzt eine Darstellung

$$u = \sum_{j=1}^{\infty} (u, \varphi_j)\, \varphi_j\,.$$

Dem Element u ordnen wir die Folge

$$Tu = \big((u, \varphi_j)\big)_{j\in\mathbb{N}}$$

zu. Offensichtlich ist T eine umkehrbar eindeutige lineare Abbildung von H auf ℓ^2. Insbesondere ist

$$(u, v) = \sum_{j=1}^{\infty} (u, \varphi_j)\, \overline{(v, \varphi_j)} = (Tu, Tv)_{\ell^2}\,.$$

■

Satz 5.18 ist nützlich, da gewisse Sätze über Hilberträume in dem recht anschaulichen Raum ℓ^2 bewiesen werden können. Ein Beispiel werden wir in dem nächsten Abschnitt sehen.

2.6 Schwache Konvergenz und schwache Kompaktheit

Neben der Normkonvergenz gibt es in Hilberträumen einen weiteren, sehr wichtigen Konvergenzbegriff, nämlich die *schwache* Konvergenz.

6.1 Definition. *Eine Folge* $(u_j)_{j\in\mathbb{N}}$, $u_j \in H$ *in einem Hilbertraum* H ***konvergiert schwach*** *gegen ein Element* u, *in Zeichen*

$$u_j \rightharpoonup u \quad \text{oder} \quad u_j \rightharpoonup u \text{ schwach in } H\ (j \to \infty)$$

genau dann, wenn für alle $v \in H$

$$(u_j, v) \to (u, v) \qquad (j \to \infty)\,.$$

Im Unterschied hierzu bezeichnet man die Konvergenz bezüglich der Norm als ***starke Konvergenz****.*

Man kann sich leicht überlegen, dass der schwache Grenzwert einer Folge eindeutig bestimmt ist.

6.2 Lemma. *Es gilt:*

(*a*) *Falls* $u_n \to u$ *stark in* H*, dann konvergiert* $u_n \rightharpoonup u$ *schwach in* H*.*

(*b*) *Aus* $u_n \rightharpoonup u$ *schwach in* H *folgt*

$$\|u\| \le \liminf_{n\to\infty} \|u_n\| \,. \tag{6.3}$$

Beweis : (*a*) Für $u_j \to u$ folgt für alle $v \in H$

$$|(u_j, v) - (u, v)| \le \|u_j - u\|\,\|v\| \to 0 \qquad (j \to \infty)\,,$$

d.h. $u_j \rightharpoonup u$ schwach in H.

(*b*) Sei u_j eine schwach konvergente Folge mit Grenzwert u. Für alle $v \in H$ gilt:

$$|(u_j, v)| \le \|u_j\|\,\|v\| \,.$$

Aufgrund der schwachen Konvergenz von u_j erhalten wir

$$|(u, v)| = \liminf_{j\to\infty} |(u_j, v)| \le \liminf_{j\to\infty} \|u_j\|\,\|v\| \,,$$

was sofort die Behauptung (6.3) liefert, wenn man $\|u\| = \sup\limits_{\|v\|=1} |(u, v)|$ beachtet. ■

6.4 Lemma. *Sei* $\{\varphi_j\}$ *ein vollständiges Orthonormalsystem in* H*. Dann konvergiert*

$$\varphi_j \rightharpoonup 0 \qquad \textit{schwach in } H\,.$$

Beweis : Für $v \in H$ gilt

$$v = \sum_{j=1}^{\infty} (v, \varphi_j)\,\varphi_j \,.$$

Da nach Satz 5.5 $\sum_{j=1}^{\infty} |(v, \varphi_j)|^2$ konvergiert, gilt $(v, \varphi_j) \to 0, (j \to \infty)$. ■

Da $\|\varphi_j\| = 1$, kann (φ_j) nicht stark (d.h. bezüglich der Normkonvergenz) gegen Null konvergieren. Man sieht also, dass die schwache Konvergenz verschieden („schwächer") von der starken Konvergenz ist.
Der folgende Satz ist ein Analogon des Satzes von Bolzano-Weierstraß.

6.5 Satz (Schwache Kompaktheit im Hilbertraum). *Sei $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine beschränkte Folge in einem Hilbertraum H. Dann gibt es eine schwach konvergente Teilfolge $(u_k)_{k\in\Lambda}$, $\Lambda \subseteq \mathbb{N}$.*

Beweis : Wir führen das Problem auf den Fall eines separablen Hilbertraumes zurück, indem wir H_0 als Abschluß von $\operatorname{span}\{u_m \mid m \in \mathbb{N}\}$ betrachten. H_0 ist separabel, da die Menge der endlichen Linearkombinationen von Elementen u_m mit rationalen Koeffizienten einerseits abzählbar, andererseits dicht in H_0 ist. H_0 ist somit isometrisch isomorph zu ℓ^2 (siehe Satz 5.18), und Satz 6.5 übersetzt sich in die Aussage:
„Sei $c^k = (c_j^k)_{j\in\mathbb{N}} \in \ell^2$, $\sum_{j=1}^\infty |c_j^k|^2 \le K^2$, $k \in \mathbb{N}$. Dann gibt es eine Teilfolge $k \in \Lambda, \Lambda \subseteq \mathbb{N}$ und ein Element $c = (c_j)_{j\in\mathbb{N}} \in \ell^2$ mit

$$\sum_{j=1}^\infty c_j^k\, \overline{\mu}_j \to \sum_{j=1}^\infty c_j\, \overline{\mu}_j \qquad (k \to \infty,\ k \in \Lambda)$$

für alle $\mu = (\mu_j)_{j\in\mathbb{N}} \in \ell^2$. "
Aus den Voraussetzungen folgt für alle $j, k \in \mathbb{N}$

$$|c_j^k| \le K.$$

Mit Hilfe des Diagonalverfahrens erhalten wir also eine Teilfolge $k \in \Lambda$, $\Lambda \subseteq \mathbb{N}$ so, dass für alle $j \in \mathbb{N}$

$$c_j^k \to c_j \quad (k \to \infty, k \in \Lambda).$$

Diese Folge $k \in \Lambda$ ist bereits unsere gesuchte Teilfolge, denn es gilt zunächst für alle $N \in \mathbb{N}$

$$\sum_{j=1}^N |c_j|^2 = \lim_{k\to\infty} \sum_{j=1}^N |c_j^k|^2 \le K^2\,,$$

und somit

$$\sum_{j=1}^\infty |c_j|^2 \le K^2\,,$$

d.h. $c \in \ell^2$. Weiterhin gilt für jedes $\mu \in \ell^2$

$$\Big|\sum_{j=1}^\infty (c_j - c_j^k)\,\overline{\mu}_j\Big| \le \underbrace{\Big|\sum_{j=1}^N (c_j - c_j^k)\,\overline{\mu}_j\Big|}_{=:\,A} + \underbrace{\Big|\sum_{j=N+1}^\infty (c_j - c_j^k)\,\overline{\mu}_j\Big|}_{=:\,B}\,.$$

Der Term B lässt sich abschätzen durch

$$B \leq \Big(\sum_{j=N+1}^{\infty} |c_j - c_j^k|^2 \Big)^{\frac{1}{2}} \Big(\sum_{j=N+1}^{\infty} |\mu_j|^2 \Big)^{\frac{1}{2}}$$
$$\leq \big(\|c\|_{\ell^2} + \|c^k\|_{\ell^2} \big) \Big(\sum_{j=N+1}^{\infty} |\mu_j|^2 \Big)^{\frac{1}{2}} \leq 2K \Big(\sum_{j=N+1}^{\infty} |\mu_j|^2 \Big)^{\frac{1}{2}}$$

Da $\sum_{j=1}^{\infty} |\mu_j|^2$ konvergiert, existiert für alle $\varepsilon > 0$ ein $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, so dass $B \leq \varepsilon$. Für dieses $N(\varepsilon)$ geht der Term A gegen 0 für $k \to \infty$, $k \in \Lambda$, da $c_j^k \to c_j$, $k \to \infty$, $k \in \Lambda$. Damit erhält man

$$\big| (c, \mu) - (c^k, \mu) \big| < 2\varepsilon \qquad (k \geq k_0(\varepsilon),\ k \in \Lambda)\,,$$

und die schwache Konvergenz $c^k \rightharpoonup c,\ k \in \Lambda$, ist bewiesen.
Damit haben wir für beliebige $v \in H_0$ die Konvergenz $(u_m, v) \to (u, v)$ $(m \to \infty,\ m \in \Lambda)$, $u = \sum_{j=1}^{\infty} c_j \, \varphi_j$, wobei (φ_j) ein Orthonormalsystem von H_0 ist, und damit auch $(u_m, w) \to (u, w)$, $w = w_1 + w_2$, $w_1 \in H_0$, $w_2 \in H_0^{\perp}$. ∎
Nun können wir Lemma 4.25 (b) beweisen.

4.25 Lemma. *Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Gebiet mit $\partial\Omega \in C^{0,1}$ und $u \in L^2(\Omega)$.*

(b) *Seien $h^{-1}(u \circ T_{j,h} - u) \in L^2(\Omega_{h_0})$ für alle $h_0 > 0$, $0 < h < h_0$ und gelte*

$$\big\| h^{-1}(u \circ T_{j,h} - u) \big\|_{L^2(\Omega_h)} \leq C_1, \quad j = 1, \ldots, n.$$

Dann existiert die schwache Ableitung $D_j u$ und es gilt

$$\|D_j u\|_{L^2(\Omega)} \leq C_1\,.$$

Beweis : Für $\varphi \in C_0^{\infty}(\Omega)$ und $|h|$ klein genug haben wir

$$\begin{aligned} \int_\Omega \Delta_j^h u \, \varphi \, dx &= \int_\Omega h^{-1}(u(x + he_j) - u(x))\varphi(x)\, dx \\ &= - \int_\Omega (-h)^{-1} u(x)(\varphi(x - he_j) - \varphi(x))\, dx \qquad (*) \\ &= - \int_\Omega u \Delta_j^{-h} \varphi \, dx\,. \end{aligned}$$

Mit dem Diagonalverfahren wählen wir eine Folge $h_k \to 0$ so, dass $\Delta_j^{h_k} u \rightharpoonup w$ schwach in $\mathrm{L}^2(\Omega')$ für alle $\Omega' \subseteq\subseteq \Omega$, was aufgrund der Voraussetzungen und

Satz 6.5 möglich ist. Für diese Folge h_k konvergiert die linke Seite in (*) gegen $\int_\Omega w\varphi\,dx$ und die rechte Seite gegen $-\int_\Omega uD_j\varphi\,dx$. Somit ist $w \in L^2_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ ein Kandidat für die schwache Ableitung von u. Für $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ folgt auf Grund der Kompaktheit des Trägers von φ, der Konvergenz von $\Delta_j^{h_k}u$ gegen w, der Cauchy-Schwarz Ungleichung und den Voraussetzungen

$$\begin{aligned}\Big|\int_\Omega w\,\varphi\,dx\Big| &= \liminf_{h_k\to 0}\Big|\int_\Omega \Delta_j^{h_k}u\,\varphi\,dx\Big|\\ &\le \liminf_{h_k\to 0}\|\Delta_j^{h_k}u\|_{L^2(\Omega_{h_k})}\|\varphi\|_{L^2(\Omega)} \le C_1\,\|\varphi\|_{L^2(\Omega)}\,.\end{aligned}$$

Eine Variante der Normformel

$$\|w\|_{L^2(\Omega)} = \sup_{\substack{\varphi\in C_0^\infty(\Omega)\\ \|\varphi\|_{L^2(\Omega)}\le 1}}\Big|\int_\Omega w\,\varphi\,dx\Big| \le C_1$$

liefert einerseits $w \in L^2(\Omega)$, und somit dass w die schwache Ableitung D_ju von u ist, und andererseits die Abschätzung für D_ju. ∎

Es folgen weitere Betrachtungen zur schwachen Konvergenz sowie ihrem Verhältnis zur starken Konvergenz.

6.6 Satz. *Sei H ein Hilbertraum und $(u_m) \subseteq H$ eine schwach konvergente Folge. Dann ist (u_m) beschränkt.*

Beweis : Dies ist eine Folge des Prinzips der gleichmäßigen Beschränktheit, ein grundlegender Satz, welcher besagt, dass in vollständigen Räumen eine „punktweise“ beschränkte Folge linearer, beschränkter Abbildungen gleichmäßig beschränkt ist. Dieser Satz von Banach-Steinhaus wird im zweiten Teil der Vorlesung bewiesen (siehe Kapitel 3 Satz 3.1). Im obigen Fall sind die linearen, beschränkten Abbildungen lineare Funktionale, nämlich $\varphi_m(v) := (v, u_m)$. Wegen der schwachen Konvergenz der u_m ist $\varphi_m(v)$ beschränkt, d.h. $|\varphi_m(v)| \le K_v$ für alle $m \in \mathbb{N}$, also „punktweise“ beschränkt. Das Prinzip der gleichmäßigen Beschränktheit ergibt $\sup\limits_{\|v\|=1}|\varphi_m(v)| \le K$, woraus $\|u_m\| \le K$ folgt. ∎

6.7 Satz. *Seien H_1, H_2 Hilberträume und sei $A : H_1 \to H_2$ beschränkt und linear. Dann ist A schwach folgenstetig, d.h. $u_m \rightharpoonup u$ schwach in H_1 impliziert $Au_m \rightharpoonup Au$ schwach in H_2.*

Beweis : Aus $u_m \rightharpoonup u$ schwach in H_1 folgt für alle $v \in H_2$, dass $(Au_m, v)_{H_2} = (u_m, A^*v)_{H_1} \to (u, A^*v)_{H_1} = (Au, v)_{H_2}$, d.h. $Au_m \rightharpoonup Au$ schwach in H_2. ∎

Ein weiterer, grundlegender, für die Variationsrechnung und Optimierung sehr nützlicher Satz ist

6.8 Satz (Banach-Saks). *Sei H ein Hilbertraum und $(u_m) \subseteq H$ eine schwach konvergente Folge mit Grenzwert $u \in H$. Dann gibt es eine Teilfolge $\Lambda \subseteq \mathbb{N}$, so dass die arithmetischen Mittel $\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} u_{m_j}$, $N \to \infty$, stark gegen u konvergieren.*

Beweis : O.B.d.A. nehmen wir an, dass $u = 0$ gilt (Übergang von u_m zu $u_m - u$). Wegen der schwachen Konvergenz $u_m \rightharpoonup 0$ wählen wir sukzessive Indizes $m_j \in \mathbb{N}$ aus, so dass

$$|(u_{m_j}, u_{m_k})| \le \frac{1}{j^2} \quad \text{für } k < j\,, \quad j \in \mathbb{N}\,.$$

In der Tat: Setze $u_{m_1} := u_1$ und seien u_{m_1} bis u_{m_k} bereits konstruiert und damit fest. Wir nutzen, dass

$$(u_m, u_{m_n}) \to 0 \quad (m \to \infty, n = 1, \dots, k)\,,$$

und erhalten so den Index m_{k+1}. Die Indexfolge (m_j) ist die gewünschte, denn es gilt

$$\begin{aligned}\Big\|\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} u_{m_j}\Big\|^2 &= \frac{1}{N^2}\sum_{j=1}^{N} \|u_{m_j}\|^2 + \frac{2}{N^2}\sum_{k=2}^{N}\sum_{j=1}^{k-1} \mathcal{R}e(u_{m_j}, u_{m_k}) \\ &\le \frac{N}{N^2}K + \frac{2}{N^2}\sum_{k=2}^{N}\sum_{j=1}^{k-1}\frac{1}{k^2} \le \frac{K}{N} + \frac{2}{N^2}N\frac{\pi^2}{6} \to 0 \quad (N \to \infty)\,.\end{aligned}$$

■

Wir geben zwei Anwendungen des Satzes von Banach-Saks:

6.9 Satz. *Sei C eine konvexe, abgeschlossene Menge in einem Hilbertraum H und $(u_m) \subseteq C$ eine Folge mit $u_m \rightharpoonup u$ schwach in H $(m \to \infty)$. Dann gilt $u \in C$.*

Beweis : Nach Satz 6.8 von Banach-Saks existiert eine Teilfolge $\Lambda \subseteq \mathbb{N}$, so dass $\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} u_{m_j} \to u$ stark konvergiert. Da C konvex ist, liegt die Konvexkombination $\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} u_{m_j}$ für jedes $N \in \mathbb{N}$ ebenfalls in C. Da C abgeschlossen ist, liegt auch der Grenzwert u in C. ■

6.10 Satz. *Sei C eine nichtleere, abgeschlossene, konvexe Menge eines Hilbertraumes H und $f : C \to \overline{\mathbb{R}}$ stetig in der starken Topologie von H. Ferner sei f konvex und koerziv auf C, d.h. $f(u) \to \infty$ für $\|u\| \to \infty$, $u \in C$. Dann existiert ein Minimum von f auf C.*

Beweis : Falls f konstant gleich ∞ auf C ist, dann ist jeder Punkt in C ein Minimum. Falls es ein $u^* \in C$ gibt mit $f(u^*) = -\infty$, dann ist u^* ein Minimum. Somit bleibt der Fall $f\colon C \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ zu betrachten. Dann gilt $\inf\limits_C f =: I < \infty$. Wir unterscheiden $I \in \mathbb{R}$ und $I = -\infty$.
(a) Sei $I \in \mathbb{R}$. Dann existiert eine Minimalfolge $(u_m) \subseteq C$, so dass

$$f(u_m) \to I\,, \qquad |f(u_m) - I| \le 2^{-m}\,.$$

Wegen der Koerzivität von f ist $\|u_m\| \le K$ und es gibt eine Teilfolge, so dass, nach Umnummerierung,

$$u_N \rightharpoonup u \text{ schwach} \qquad \text{und} \qquad \tfrac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} u_j \to u \text{ stark.} \tag{6.11}$$

Es ist $\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} u_j \in C$, also auch $u \in C$. Ferner gilt $\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} f(u_j) \to I$, $N \to \infty$. In der Tat, sei $\varepsilon > 0$, dann gilt für geeignetes N, d.h. $N^{-1} \le \varepsilon$,

$$\begin{aligned}\left|\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} f(u_j) - I\right| &= \left|\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}(f(u_j) - I)\right| \le \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{\infty}|f(u_j) - I| \\ &\le \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{\infty} 2^{-j} \le \frac{1}{N} \le \varepsilon.\end{aligned}$$

Somit erhalten wir für N groß genug:

$$f(u) \le \varepsilon + f\left(\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} u_j\right) \le \varepsilon + \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} f(u_j) \le 2\varepsilon + \inf_C f \le f(u) + 2\varepsilon\,.$$

Anschließender Grenzübergang $\varepsilon \to 0$ liefert $f(u) = \inf\limits_C f$.
(b) $I = -\infty$. Dann existiert eine Minimalfolge $(u_m) \subseteq C$, so dass

$$f(u_m) \to I\,, \qquad f(u_m) \le -m\,.$$

Wegen der Koerzivität von f ist $\|u_m\| \le K$ und es gibt eine Teilfolge, so dass, nach Umnummerierung, (6.11) gilt. Wie im Fall (a) folgt $u \in C$, und es gilt wiederum $\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} f(u_j) \to I$, $N \to \infty$. In der Tat,

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} f(u_j) \le -\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} j = -\lim_{N\to\infty} \frac{N+1}{2} = -\infty = I\,.$$

Somit erhalten wir

$$I \leq f(u) = \lim_{N\to\infty} f\left(\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} u_j\right) \leq \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} f(u_j) = I\,,$$

d.h. $f(u) = I = -\infty$, was ein Widerspruch zu $f\colon C \to \mathbb{R}\cup\{\infty\}$ ist. Somit kann der Fall $I = -\infty$ nicht auftreten. ∎

2.7 Kompakte lineare Operatoren

Wir haben bereits die Begriffe relativ folgenkompakt und folgenkompakt definiert (vgl. Definition 3.16 in Kapitel 1). Wir wollen nun die analogen Begriffe für die schwache Konvergenz einführen.

7.1 Definition. *Eine Menge M eines Hilbertraumes H heißt* ***relativ schwach folgenkompakt****, wenn jede Folge $(u_m) \subseteq M$ eine in H schwach konvergente Teilfolge besitzt.*

7.2 Definition. *Eine Menge M eines Hilbertraumes H heißt* ***schwach folgenkompakt****, wenn jede Folge $(u_m) \subseteq M$ eine in M schwach konvergente Teilfolge besitzt.*

Wie wir in Abschnitt 2.6 bereits diskutiert haben, sind beschränkte Mengen im Hilbertraum nicht notwendig relativ folgenkompakt - allerdings relativ schwach folgenkompakt.
Fundamental für die Anwendungen der Funktionalanalysis ist der Begriff des kompakten Operators.

7.3 Definition. *Ein Operator $A : H_1 \to H_2$ mit Hilberträumen H_1, H_2 heißt* ***kompakt****, wenn A stetig ist und beschränkte Mengen in relativ folgenkompakte Mengen überführt. Der Operator $A : H_1 \to H_2$ heißt* ***vollstetig****, wenn er schwach konvergente Folgen in stark konvergente Folgen überführt, d.h. $u_m \rightharpoonup u$ in H_1 impliziert $Au_m \to Au$ in H_2.*

Bei diesen Definitionen muss A nicht notwendig linear sein. Da H_1, H_2 metrische Räume sind, ist nach Lemma 3.13 in Kapitel 1 die Stetigkeit von A äquivalent zur Folgenstetigkeit von A.

7.4 Lemma. *Seien H_1, H_2 Hilberträume. Der lineare Operator $A : H_1 \to H_2$ ist genau dann kompakt, wenn er vollstetig ist. Insbesondere ist A beschränkt.*

Beweis : „$\Leftarrow$“ Sei A vollstetig. Da starke Konvergenz schwache Konvergenz impliziert, ist A folgenstetig. Aus Lemma 3.13 in Kapitel 1 folgt die Stetigkeit von A. Sei nun $M \subseteq H_1$ eine beschränkte Menge und sei $(u_m) \subseteq M$ eine Folge. Zu zeigen ist, dass (Au_m) eine stark konvergente Teilfolge hat. Da beschränkte Mengen schwach folgenkompakt sind, gibt es eine Teilfolge $\Lambda \subset \mathbb{N}$, so dass $u_m \rightharpoonup u \ (m \in \Lambda, \ m \to \infty)$ schwach in H_1. Da A vollstetig ist, konvergiert $Au_m, \ m \in \Lambda$ stark in H_2 gegen Au.
„$\Rightarrow$“ Sei A kompakt. Nach Definition von kompakt ist A stetig und nach Voraussetzung ist A linear. Somit ist A nach Satz 2.5 in Kapitel 1 beschränkt. Nach Satz 6.7 sind beschränkte lineare Abbildungen schwach folgenstetig, d.h. aus $u_m \rightharpoonup u$ schwach folgt $Au_m \rightharpoonup Au$ schwach. Angenommen, Au_m konvergiere nicht stark gegen Au. Dann gibt es ein $\varepsilon > 0$ und eine Teilfolge Λ mit $\|Au_m - Au\| > \varepsilon, \ m \in \Lambda$. Da $(Au_m)_{m\in\Lambda}$ relativ kompakt ist, gibt es eine Teilfolge $\Lambda_1 \subset \Lambda$, so dass $Au_m \to f$ stark in H_2. Es folgt $\|f - Au\| \geq \varepsilon$ und $Au_m \rightharpoonup f$ schwach in H_2. Dies ist ein Widerspruch mit $Au_m \rightharpoonup Au$ schwach, d.h. es gilt: $Au_m \to Au$. ■

Beispiele kompakter linearer Abbildungen:
Typische Beispiele sind Integraloperatoren: Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ beschränkt und offen, $K \in L^2(\Omega \times \Omega)$ und

$$Au(x) := \int_\Omega K(x,y)\, u(y)\, dy \tag{7.5}$$

7.6 Lemma. *Der durch (7.5) definierte Operator $A : L^2(\Omega) \to L^2(\Omega)$ ist vollstetig.*

Beweis : A ist offensichtlich linear und somit reicht es aufgrund von Lemma 7.4 zu zeigen, dass A kompakt ist. Wir beweisen diese Aussage zunächst für Kerne $K \in C\big(\overline{\Omega} \times \overline{\Omega}\big)$. Es gilt für $(u_m) \subset L^2(\Omega)$, $\|u_m\| \leq c$

$$\begin{aligned} |Au_m(x) - Au_m(z)| &= \left| \int_\Omega \big(K(x,y) - K(z,y)\big)\, u_m(y)\, dy \right| \\ &\leq \sup_{y\in\overline{\Omega}} |K(x,y) - K(z,y)| \int_\Omega |u_m(y)|\, dx \\ &\leq \sup_{y\in\overline{\Omega}} |K(x,y) - K(z,y)| |\Omega|^{1/2}\, \|u_m\|_{L^2(\Omega)} \,. \end{aligned}$$

Da K gleichmäßig stetig ist, gibt es für $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$, so dass

$$\sup_{y\in\overline{\Omega}} |K(x,y) - K(z,y)| < \varepsilon \qquad \text{für } |x - z| < \delta \,.$$

Die Funktionenfolge (Au_m) ist daher *gleichgradig stetig.* Aus

$$\sup_{x\in\overline{\Omega}} |Au_m(x)| \leq \sup_{x\in\overline{\Omega}} \int\limits_{\Omega} |K(x,y)|\,|u_m(y)|\;dy$$
$$\leq \sup_{x,y\in\overline{\Omega}} |K(x,y)|\,|\Omega|^{\frac{1}{2}}\,\|u_m\|_{L^2(\Omega)}$$

folgt, dass die Folge (Au_m) auch *gleichgradig beschränkt* ist. Nach dem Satz von Arzela-Ascoli gibt es daher eine gleichmäßig konvergente Teilfolge. Konvergenz in $L^\infty(\Omega)$ impliziert Konvergenz in $L^2(\Omega)$ bei beschränktem Gebiet, denn

$$\|Au_m - Au\|_{L^2(\Omega)} \leq |\Omega|^{\frac{1}{2}}\,\|Au_m - Au\|_{L^\infty(\Omega)}\ .$$

Der Operator A bildet daher, bei gleichmäßig stetigem Kern, beschränkte Mengen in relativ kompakte Mengen ab. Es bleibt zu zeigen, dass A stetig ist. Mithilfe der Hölder Ungleichung folgt

$$\int_\Omega |Au(x)|^2\;dx = \int_\Omega \Big|\int_\Omega K(x,y)u(y)\,dy\Big|^2\,dx$$
$$\leq \sup_{x,y\in\overline{\Omega}} |K(x,y)|^2 \int_\Omega \Big|\int_\Omega |u(y)|\,dy\Big|^2\,dx$$
$$\leq \sup_{x,y\in\overline{\Omega}} |K(x,y)|^2\;|\Omega|^2\;\|u\|^2_{L^2(\Omega)}\ ,$$

d.h. A ist beschränkt, und somit stetig. Somit ist A kompakt.
Im allgemeinen Fall $K \in L^2(\Omega\times\Omega)$ verwenden wir ein Approximationsargument. Da $C_0^\infty(\Omega)$ dicht in $L^2(\Omega)$ ist, gibt es eine Folge von Funktionen $(K_m) \subseteq C(\overline{\Omega}\times\overline{\Omega})$ mit

$$\int\limits_\Omega\int\limits_\Omega |K-K_m|^2\,dx\,dy \to 0 \qquad (m\to\infty)\,.$$

Wir setzen $A_m u(x) := \int\limits_\Omega K_m(x,y)\,u(y)\,dy$ und erhalten

$$\|A - A_m\| = \sup_{\|u\|_{L^2}\leq 1} \Big|\int\limits_\Omega\int\limits_\Omega \big(K(x,y) - K_m(x,y)\big)\,u(y)\,dy\;dx\Big|$$
$$\leq |\Omega|^{\frac{1}{2}} \Big(\int\limits_\Omega\int\limits_\Omega |K(x,y)-K_m(x,y)|^2\,dy\,dx\Big)^{\frac{1}{2}} \to 0.$$

Da A_m vollstetig ist, impliziert Satz 7.7 die Aussage von Lemma 7.6. ■
Interessanterweise führt die Konvergenz bezüglich der Operatornorm nicht aus der Menge der vollstetigen Abbildungen heraus.

7.7 Satz. *Seien H_1, H_2 Hilberträume, $A, A_m : H_1 \to H_2$ linear und seien A_m vollstetig. Aus*

$$\|A - A_m\| \to 0 \qquad (m \to \infty)\,,$$

folgt, dass A vollstetig ist.

Beweis : Sei $u_j \rightharpoonup u$ schwach in H_1. Es gilt $\|u_j\| \le K$ für alle $j \in \mathbb{N}$ und somit $\|u\| \le K$. Sei $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Dann gilt

$$\|A - A_m\| < \frac{\varepsilon}{4K}$$

für mindestens ein m. Es konvergiert $A_m u_j \to A_m u$ $(j \to \infty)$ stark in H_2, d.h. für alle $j \ge j_0$ folgt $\|A_m u_j - A_m u\| \le \frac{\varepsilon}{2}$. Daraus folgt für $j \ge j_0$

$$\begin{aligned}\|Au_j - Au\| &= \|(A - A_m)\, u_j + A_m u_j - A_m u - (A - A_m)\, u\| \\ &\le \|A - A_m\|\, \|u_j\| + \|A_m u_j - A_m u\| + \|A - A_m\|\, \|u\| \\ &< \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{4} = \varepsilon\,.\end{aligned}$$

■

7.8 Lemma. *Seien H_1, H_2, H_3 Hilberträume und seien $A_1 : H_1 \to H_2$, $A_2 : H_2 \to H_3$ lineare Operatoren. Dann gilt:*

(i) *Ist A_1 stetig und A_2 kompakt, so ist $A_2 \circ A_1$ kompakt.*

(ii) *Ist A_1 kompakt und A_2 stetig, so ist $A_2 \circ A_1$ kompakt.*

Beweis : Übung ■

Ein weiterer wichtiger Operator ist der Einbettungsoperator. Seien H_1, H_2 Hilberträume für die $H_1 \subset H_2$ als Mengeninklusion gilt.
Eine Abbildung $J : H_1 \to H_2$ heißt **Einbettung**, wenn J jedem Element u aus H_1 das Element u aufgefaßt als Element in H_2 zuordnet. Wenn die Einbettung J beschränkt ist, sagen wir dass H_1 stetig nach H_2 einbettet.

7.9 Satz. *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt. Dann ist die Einbettung $J : H_0^{1,2}(\Omega) \to L^2(\Omega)$ vollstetig, d.h. aus $u_m \rightharpoonup u$ schwach in $H_0^{1,2}(\Omega)$ folgt $u_m \to u$ stark in $L^2(\Omega)$.*

Beweis : Wir zeigen, dass $J : H_0^{1,2}(\Omega) \to L^2(\Omega)$ kompakt ist. Aus

$$\|u\|_{L^2} \le \|u\|_{H_0^{1,2}}$$

folgt, dass J stetig ist. Da $H_0^{1,2}(\Omega)$ der Abschluss von $C_0^\infty(\Omega)$ in der $H^{1,2}(\Omega)$-Norm ist, können wir $H_0^{1,2}(\Omega)$ als Teilraum von $H_0^{1,2}(Q)$ mit einem Würfel

$Q = [-\pi L, \pi L]^n \supset\supset \Omega$ betrachten.[4] Die $H_0^{1,2}(Q)$-Funktionen werden periodisch auf ganz $\mathbb{R}^n$ fortgesetzt mit Q als Periodizitätswürfel. Sei nun $(u_m) \subseteq H_0^{1,2}(Q)$ beschränkt. Dann besitzt $u_m \in L^2(Q)$ aufgrund von Lemma 5.16 und Satz 5.5 eine Fourierentwicklung

$$u_m = \sum_k c_k^m \frac{e^{i\frac{k\cdot x}{L}}}{(2\pi L)^{\frac{n}{2}}},$$

wobei die Summation über die Multiindizes $k = (k_1, k_2, \ldots, k_n)$, $k_j \in \mathbb{Z}$, läuft. Die Koeffizienten c_k sind gegeben durch

$$c_k^m = \frac{1}{(2\pi L)^{\frac{n}{2}}} \int_Q u_m(x) e^{-i\frac{k\cdot x}{L}}\, dx\,.$$

Da auch $D_j u^m \in L^2(Q), j = 1, \ldots, n$, haben wir auch

$$D_j u^m = \sum_k d_k^{m,j} \frac{e^{i\frac{k\cdot x}{L}}}{(2\pi L)^{\frac{n}{2}}},$$

wobei

$$\begin{aligned} d_k^{m,j} &= \frac{1}{(2\pi L)^{\frac{n}{2}}} \int_Q D_j u^m(x) e^{-\frac{ik\cdot x}{L}}\, dx \\ &= \frac{1}{(2\pi L)^{\frac{n}{2}}} \int_Q u^m(x) e^{-\frac{ik\cdot x}{L}} \frac{ik_j}{L}\, dx \\ &= \frac{ik_j}{L} c_k^m\,. \end{aligned}$$

Aus der Beschränktheit der Folge $\|u_m\|_{H^{1,2}}$ folgt nach Satz 5.5 die Existenz einer Konstanten K, so dass für alle $m \in \mathbb{N}$

$$\sum_k |k|^2 |c_k^m|^2 \le K\,, \qquad |c_{0,0,\ldots,0}^m|^2 \le K\,. \tag{7.10}$$

Aus (7.10) folgt mit dem Diagonalverfahren, dass es eine Teilfolge $\Lambda \subseteq \mathbb{N}$ gibt so, dass für alle Multi-Indizes k

$$c_k^m \to c_k \qquad (m \in \Lambda,\ m \to \infty).$$

[4]Die Funktionen aus $H_0^{1,2}(\Omega)$ werden durch 0 auf $Q \setminus \Omega$ fortgesetzt.

Hieraus folgt, dass (c^m) eine Cauchyfolge in $\ell^2(\mathbb{Z}^n)$ ist, denn

$$\begin{aligned}\sum_k |c_k^m - c_k^j|^2 &\leq \sum_{|k|\leq N} |c_k^m - c_k^j|^2 + \frac{1}{N^2} \sum_{|k|\geq N} |k|^2\, |c_k^m - c_k^j|^2 \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{4K}{N^2} < \varepsilon \qquad \text{für } m, j \geq l(\varepsilon)\,.\end{aligned}$$

Da $\ell^2(\mathbb{Z}^n)$ vollständig ist, haben wir gezeigt, dass $c^m \to c$ in ℓ^2. Auf die Fourierreihe übertragen, impliziert die Konvergenz $c^m \to c$ in $\ell^2(\mathbb{Z}^n)$ die Konvergenz $u^m \to u\,(m \to \infty,\, m \in \Lambda)$ stark in $L^2(Q)$, wobei $c \in \ell^2(\mathbb{Z}^n)$ der Vektor der Fourierkoeffizienten der u definierenden Reihe ist. ∎

7.11 Satz. *Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet mit Lipschitz-Rand $\partial\Omega \in C^{0,1}$. Dann ist die Einbettung $J : H^{1,2}(\Omega) \to L^2(\Omega)$ vollstetig.*

Beweis : (i) Der eindimensionale Fall $\Omega = (a, b) =: I$.
Sei $(u_m) \subseteq H^{1,2}(I)$, $\|u_m\|_{H^{1,2}} \leq K$. Dann gilt aufgrund der Dichtheit von $C^1(I)$ in $H^{1,2}(I)$

$$|u_m(\eta) - u_m(\xi)| = \left| \int_\xi^\eta u_m'\, ds \right| \leq |\eta - \xi|^{1/2} \left(\int_I |u_m'|^2\, dt \right)^{1/2} \leq K |\eta - \xi|^{1/2}\,,$$

d.h. die (u_m) sind gleichgradig stetig. Die gleichgradige Beschränktheit folgt, da

$$\left| ⨍_I u_m(\eta)\, d\eta - u_m(\xi) \right| \leq ⨍_I |u_m(\eta) - u_m(\xi)|\, d\eta \leq K ⨍_I |\eta - \xi|^{1/2}\, d\eta \leq \tilde{K}\,,$$

wobei $⨍_I f(s)\, ds = \frac{1}{|I|} \int_I f(s)\, ds$ das Mittelwertintegral ist, und

$$\left| ⨍_I u_m(\eta)\, d\eta \right| \leq |I|^{\frac{-1}{2}} \|u_m\|_{L^2}\,.$$

Nach dem Satz von Arzela-Ascoli gibt es daher eine Teilfolge, die gleichmässig und damit auch stark in $L^2(I)$ konvergiert.
(ii) Der allgemeine Fall. Der Beweis läuft wie im Beweis von Satz 7.9. Allerdings muss man folgende Aussage benutzen:
Es existiert ein *Fortsetzungsoperator* $C : H^{1,2}(\Omega) \to H_0^{1,2}(Q)$, d.h.

$$(Cu)|_\Omega = u \qquad \forall u \in H^{1,2}(\Omega)$$

und

$$\|Cu\|_{H_0^{1,2}(Q)} \leq K\, \|u\|_{H^{1,2}(\Omega)}\,.$$

Zur Konstruktion dieses Operators wird die Regularität des Randes benutzt. ■

Satz 7.9 und Satz 7.11 lassen sich auch folgendermaßen interpretieren:

7.12 Lemma. *Sei Ω ein beschränktes Gebiet des $\mathbb{R}^n$ und sei H entweder $H_0^{1,2}(\Omega)$ oder $H^{1,2}(\Omega)$, wobei dann $\partial\Omega \in C^{0,1}$ gefordert wird. Weiterhin sei $J : H \to H$ die durch den Rieszschen Darstellungssatz gegebene Abbildung mit*

$$(Ju, v)_H = (v, u)_{L^2} \qquad \text{für alle } u, v \in H. \tag{7.13}$$

Dann ist J kompakt.

Beweis : Aus (7.13) mit $v = Ju$ und der Cauchy-Schwarz Ungleichung folgt

$$\|Ju\|_H \le \|u\|_{L^2}.$$

Somit ist J ein beschränkter linearer Operator. Für $\|u_m\|_H \le K$ folgt aus dieser Ungleichung, dass die (Ju_m) beschränkt in H sind. Andererseits gibt es wegen den Sätzen 7.9 und 7.11 eine Teilfolge Λ, so dass $(u_m)_{m\in\Lambda}$ eine Cauchy-Folge in $L^2(\Omega)$ ist. Also liefert obige Ungleichung angewendet auf $u_m - u_k$, dass $\|Ju_m - Ju_k\|_H \to 0$ folgt. ■

Jetzt können wir Satz 4.18 beweisen.

4.18 Satz. *Sei Ω ein beschränktes Gebiet des $\mathbb{R}^n$ mit $\partial\Omega \in C^{0,1}$. Dann existiert eine Konstante K, so dass für alle $u \in H^{1,2}(\Omega)$ gilt:*

$$\int_\Omega |u - u_\Omega|^2 \, dx \le K \int_\Omega |\nabla u|^2 \, dx\,, \tag{4.19}$$

wobei $u_\Omega := \fint_\Omega u\, dx := \frac{1}{|\Omega|} \int_\Omega u\, dx$ der Mittelwert von u über Ω ist.

Beweis : Da sich beide Seiten nicht verändern, wenn man zu u eine beliebige Konstante addiert können wir annehmen, dass $u_\Omega = 0$. Sei die Behauptung falsch. Dann gibt es eine Folge $(u_k) \subseteq H^{1,2}(\Omega)$ mit Mittelwert Null, so dass

$$\begin{aligned} \int_\Omega |u_k|^2 \, dx &= 1\,, \\ \int_\Omega |\nabla u_k|^2 \, dx &\le \frac{1}{k}\,. \end{aligned} \tag{7.14}$$

Somit ist die Folge (u_k) in $H^{1,2}(\Omega)$ beschränkt und nach Satz 7.11 gibt es eine Teilfolge (u_{k_j}) die in $L^2(\Omega)$ stark gegen $u \in L^2(\Omega)$ konvergiert, wobei aufgrund von (7.14) $\|u\|_{L^2} = 1$, und die in $H^{1,2}(\Omega)$ schwach gegen u konvergiert. Nach (7.14) und Lemma 6.2 gilt $\|\nabla u\|_{L^2} \le \liminf_{k\to\infty} \|\nabla u_k\|_{L^2} = 0$, was aber $\nabla u = 0$ fast überall in Ω impliziert. Daraus folgt dass u in Ω konstant ist. In der Tat, sei $u_\varepsilon = J_\varepsilon * u$ die Regularisierung von u. Dann gilt für alle $x \in \Omega_\varepsilon := \{x \in \Omega \mid \operatorname{dist}(x, \partial\Omega) > \varepsilon\}$:

$$\begin{aligned}
\nabla u_\varepsilon(x) &= \nabla_x \int_{\mathbb{R}^n} J_\varepsilon(x-y)u(y)\,dy \\
&= \nabla_x \int_{\mathbb{R}^n} J_\varepsilon(y)u(x-y)\,dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} J_\varepsilon(y)\nabla_x u(x-y)\,dy \\
&= J_\varepsilon * \nabla u(x) = 0\,,
\end{aligned}$$

da $\nabla u \in L^2(\Omega)$ ist. Somit sind u_ε in Ω_ε konstant. Aufgrund der Eigenschaften der Glättung (siehe Analysis III, Satz 15.4 und 15.5) konvergiert $u_\varepsilon \to u$ in $L^2(\Omega)$ und somit ist u auf ganz Ω konstant. Der Grenzwert u hat auch Mittelwert Null, da

$$\left| \fint_\Omega u_k\,dx - \fint_\Omega u\,dx \right| \le |\Omega|^{\frac{-1}{2}} \|u_k - u\|_{L^2} \to 0 \qquad (k \to \infty)$$

und die Mittelwerte von u_k Null sind. Damit ist u notwendig identisch Null, was ein Widerspruch zu $\|u\|_{L^2} = 1$ ist. ■

Als weitere Anwendung der Begriffe werden wir in diesem Abschnitt die Endlichdimensionalität des Kernes von Operatoren der Gestalt $A + K$, A koerziv und beschränkt, K kompakt, und verwandte Fragen behandeln. Zuvor benötigen wir noch folgendes Resultat:

7.15 Satz. *Sei $K : H_1 \to H_2$ ein lineare, vollstetige Abbildung eines Hilbertraumes H_1 in einen Hilbertraum H_2. Dann ist die adjungierte Abbildung $K^* : H_2 \to H_1$ vollstetig.*

Beweis : Sei $v_m \rightharpoonup v$ schwach in H_2. Nach Definition des Begriffs „Supremum“ gibt es Elemente u_m mit $\|u_m\|_{H_1} = 1$ und Zahlen $\varepsilon_m \to 0$, so dass

$$\|K^*v_m - K^*v\|_{H_1} = \sup_{\|u\|_{H_1}=1} |(u, K^*v_m - K^*v)_{H_1}| = |(u_m, K^*v_m - K^*v)_{H_1}| + \varepsilon_m\,.$$

O.B.d.A. kann man u_m so wählen, dass $u_m \rightharpoonup u$ in H_1 (vergleiche Satz 6.5). Wir haben also

$$\|K^*v_m - K^*v\|_{H_1} = |(Ku_m, v_m - v)_{H_2}| + \varepsilon_m\,. \tag{7.16}$$

Da K vollstetig ist, folgt $Ku_m \to f$ stark in H_2. Somit gilt

$$(Ku_m, v_m - v)_{H_2} \to 0 \qquad (m \to \infty)\,. \tag{7.17}$$

In der Tat: $v_m \rightharpoonup v$ schwach in H_2 und $Ku_m \to f$ stark in H_2 impliziert

$$\begin{aligned} |(Ku_m, v_m - v)| &\le |(Ku_m - f, v_m - v)| + |(f, v_m - v)| \\ &\le \underbrace{\|Ku_m - f\|}_{\to 0} \|v_m - v\| + |\underbrace{(f, v_m - v)}_{\to 0}| \to 0 \qquad (m \to \infty). \end{aligned}$$

Aus (7.16) und (7.17) folgt, dass K vollstetig ist. ∎

7.18 Satz. *Sei $A : H_1 \to H_2$ eine lineare, beschränkte Abbildung zwischen den Hilberträumen H_1 und H_2. A genüge der Koerzivitätsungleichung*

$$\|Au\|_{H_2} \ge c\|u\|_{H_1}\,, \qquad u \in H_1, \tag{7.19}$$

mit einer positiven Konstanten c. Ferner sei $K : H_1 \to H_2$ linear und vollstetig. Dann ist der Bildraum $(A+K)(H_1)$ abgeschlossen und der Kern von $A+K$ endlichdimensional.

Beweis : (i) Angenommen, es wäre

$$\dim N(A+K) = \infty\,. \tag{7.20}$$

Dann gibt es nach Lemma 5.2 ein Orthonormalsystem $\{\varphi_j\}$, $\varphi_j \in N(A+K)$. Da $\varphi_j \in N(A+K)$, gilt $A\varphi_j = -K\varphi_j$, d.h. die Folge $(A\varphi_j)$ ist relativ kompakt, und es gibt eine stark konvergente Teilfolge $(A\varphi_{j_\ell})$. Da $\varphi_{j_\ell} \perp \varphi_{j_k}$, $\ell \ne k$, folgt $\|\varphi_{j_\ell} - \varphi_{j_k}\| = \sqrt{2}$, und wegen der vorausgesetzten Koerzivitätsungleichung

$$\|A\varphi_{j_\ell} - A\varphi_{j_k}\| \ge c\sqrt{2}\,, \qquad \ell \ne k\,.$$

Die Folge $(A\varphi_{j_\ell})$ kann daher nicht konvergieren. Also ist $\dim N(A+K) < \infty$.

(ii) Gelte $(A+K)u_m \to f$ in H_2. Wir müssen zeigen, dass ein $u \in H_1$ existiert mit $(A+K)u = f$. Da A und K stetig sind, ist der Kern $N(A+K)$ von $A+K$ abgeschlossen. Jedes u_m hat somit eine eindeutige Zerlegung

$$u_m = v_m + w_m, \qquad w_m \in N(A+K),\ v_m \perp N(A+K).$$

Wir werden zeigen, dass die Folge (v_m) konvergiert. Aufgrund von Lemma 7.22 gibt es eine positive Konstante $c_0 > 0$, so dass

$$\|(A+K)u\| \ge c_0\|u\| \qquad \text{für alle } u \in (N(A+K))^\perp\,. \tag{7.21}$$

Da $(A+K)u_m = (A+K)v_m$, gilt auch

$$(A+K)v_m \to f \qquad (m \to \infty)$$

und $\big((A+K)v_m\big)$ ist eine Cauchyfolge. Wegen (7.21) ist daher auch (v_m) eine Cauchyfolge (wende (7.21) mit $u = v_m - v_k$ an). Daher folgt $f = (A+K)v$, und Satz 7.18 ist bewiesen. ∎

7.22 Lemma. *Unter den Voraussetzungen von Satz 7.18 gibt es eine positive Konstante c_0, so dass*

$$\|Au + Ku\|_{H_2} \geq c_0 \, \|u\|_{H_1} \qquad \textit{für alle } u \in (N(A+K))^{\perp} .$$

Beweis : Angenommen, die Behauptung wäre falsch. Dann gibt es eine Folge $(u_m) \subseteq (N(A+K))^{\perp}$ mit $\|u_m\| = 1$, $\|Au_m + Ku_m\| \to 0$. Da K kompakt und (u_m) beschränkt, ist die Folge (Ku_m) relativ kompakt, somit auch die Folge (Au_m). In der Tat, es gibt eine Teilfolge $\Lambda \subset \mathbb{N}$, so dass $Ku_m \to f$ $(m \in \Lambda,\ m \to \infty)$. Da weiterhin $Au_m + Ku_m \to 0$, gilt auch

$$Au_m = \big(Au_m + Ku_m\big) - Ku_m \to f \qquad (m \in \Lambda,\ m \to \infty)\,,$$

d.h. $Au_m \to f$. Aus (7.19), angewandt auf $u_m - u_k$, folgt, dass $(u_m)_{m \in \Lambda}$ eine Cauchyfolge ist. Somit gilt $u_m \to u$ $(m \to 0,\ m \in \Lambda)$, und da $\|u_m\| = 1$, folgt $\|u\| = 1$, also $u \neq 0$. Da $u_m \in N(A+K)^{\perp}$ und $N(A+K)^{\perp}$ abgeschlossen ist, gilt auch $u \in N(A+K)^{\perp}$. (Orthogonalkomplemente sind immer abgeschlossen: $0 = (u_m, v) \to (u, v)$.) Damit gilt $(A+K)u \neq 0$, da $(N(A+K))^{\perp} \cap N(A+K) = \{0\}$, und es ergibt sich der Widerspruch

$$u_m \to u, \quad (A+K)u_m \to 0 \quad \text{und} \quad (A+K)u \neq 0\,.$$

∎

Die Endlichdimensionalität des Defektraumes $\big((A+K)(H_1)\big)^{\perp}$ erhält man analog zu Satz 7.18 durch eine Voraussetzung an A^*.

7.23 Satz. *Sei $A : H_1 \to H_2$ eine lineare, beschränkte Abbildung zwischen den Hilberträumen H_1, H_2. Die adjungierte Abbildung A^* erfülle*

$$\|A^* v\|_{H_1} \geq c \, \|v\|_{H_2} \quad \text{für alle } v \in H_2$$

mit einer positiven Konstanten c. Ferner sei $K : H_1 \to H_2$ vollstetig und linear. Dann ist

$$\dim \big((A+K)H_1\big)^{\perp} < \infty.$$

Beweis : Nach Satz 7.18 und Satz 7.15, Satz 4.3 ist $\dim N(A^* + K^*) < \infty$. Sei nun $v \in \big((A+K)H_1\big)^\perp$, d.h. $\big((A+K)u, v\big) = 0$ für alle $u \in H_1$. Daraus folgt $\big((A+K)H_1\big)^\perp \subset N(A^* + K^*)$. Da $\dim N(A^* + K^*) < \infty$ und $\big((A+K)H_1\big)^\perp$ linear und abgeschlossen ist, folgt die Endlichkeit der Dimension von $\big((A+K)H_1\big)^\perp$. ■

Ist $H_1 = H_2 = H$, so folgen die Bedingungen $\|Au\| \geq c\,\|u\|$, $\|A^*u\| \geq c\,\|u\|$ beide aus der Bedingung

$$\mathcal{R}e(Au, u) \geq c\,\|u\|^2\,. \tag{7.24}$$

Im Folgenden bringen wir eine bedeutende Anwendung der Ergebnisse aus Abschnitt 2.4 und Abschnitt 2.7 auf Randwertprobleme elliptischer partieller Differentialgleichungen. Entscheidend ist, dass man für Randwertprobleme

$$-\sum_{i,k=1}^{n} D_i\big(a_{ik}(x)\,D_k u\big) + \sum_{i=1}^{n} b_i(x)\,D_i u + c(x)\,u = f \qquad \text{in } \Omega \tag{7.25}$$

mit Randbedingungen auf $\partial\Omega$ die sogenannte *Gårdingsche Ungleichung* beweisen kann:

7.26 Satz. *Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet und seien $a_{ik} \in L^\infty(\Omega)$, $b_i \in L^\infty(\Omega)$, $c \in L^\infty(\Omega)$, $f \in L^2(\Omega)$. Es gelte die Elliptizitätsbedingung*

$$\sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}(x)\,\xi_i\,\xi_k \geq \alpha\,|\xi|^2 \quad \forall x \in \Omega, \xi \in \mathbb{R}^n$$

mit einer positiven Konstanten $\alpha > 0$. Definiere die beschränkte Bilinearform $Q : H^{1,2}(\Omega) \times H^{1,2}(\Omega) \to \mathbb{R}$ durch

$$Q(u,v) := \int_\Omega \sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}\,D_k u\,D_i v + \sum_{i=1}^{n} b_i\,D_i u\,v + c\,uv\,dx\,.$$

*Dann gilt für alle $u \in H^{1,2}(\Omega)$ die **Gårdingsche Ungleichung***

$$Q(u,u) \geq c_0\,\|u\|^2_{H^{1,2}} - \lambda_0\,\|u\|^2_{L^2}$$

mit positiven Konstanten $c_0 > 0$, $\lambda_0 > 0$.

Beweis : Wegen der Elliptizitätsbedingung schätzt man

$$\int_\Omega \sum_{i,k=1}^{n} a_{ik} D_k u\,D_i u\,dx \geq \alpha \int_\Omega |\nabla u|^2\,dx$$

ab. Den zweiten Summand in (7.25) schätzt man nach unten ab,

$$\sum_{i=1}^{n} \int_{\Omega} b_i \, D_i u \, u \, dx \geq -\frac{\alpha}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 \, dx - \frac{n \, \|b\|_\infty^2}{2\alpha} \int_{\Omega} |u|^2 \, dx \,,$$

woraus sich

$$\begin{aligned} Q(u,u) &\geq \alpha \int_{\Omega} |\nabla u|^2 \, dx - \frac{\alpha}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 \, dx - \frac{n \, \|b\|_\infty^2}{2\alpha} \int_{\Omega} |u|^2 dx - \|c\|_\infty \int_{\Omega} |u|^2 \, dx \\ &= \frac{\alpha}{2} \Big(\int_{\Omega} |\nabla u|^2 \, dx + \int_{\Omega} |u|^2 \, dx \Big) - \Big(\frac{n \, \|b\|_\infty^2}{2\alpha} + \frac{\alpha}{2} + \|c\|_\infty \Big) \int_{\Omega} |u|^2 dx \end{aligned}$$

ergibt. ■

Um die Gårdingsche Ungleichung zu verwerten, setzen wir - nach dem Rieszschen Darstellungssatz -

$$(Au, v)_H = Q(u, v) \tag{7.27}$$

mit $H = H_0^{1,2}$ oder $H = H^{1,2}$ als Grundraum. Die Abbildung A ist dann eine beschränkte lineare Abbildung von H in sich und erfüllt

$$(Au, u)_H \geq c \, \|u\|_H^2 - \lambda_0 \, \|u\|_{L^2}^2 \,. \tag{7.28}$$

Sei J die nach Lemma 7.12 *vollstetige*, lineare Abbildung von H nach H, für die gilt:

$$(Ju, v)_H = (u, v)_{L^2} \,.$$

Aus (7.28) folgt

$$\big((A + \lambda_0 J)u, u \big)_H \geq c \, \|u\|_H^2 \,, \tag{7.29}$$

und wir können Satz 7.23, Satz 7.18 und die Bemerkung im Zusammenhang mit (7.24) auf die Abbildung $A + \lambda_0 J$ (anstelle von A) und $-\lambda_0 J$ (anstelle von K) anwenden. Dies ergibt den *Hauptsatz* zur sogenannten *normalen Lösbarkeit elliptischer Randwertprobleme.*

7.30 Satz. *Unter den Voraussetzungen von Satz 7.26 ist das Randwertproblem:*
„gesucht ist $u \in H_0^{1,2}$ bzw. $H^{1,2}$, so dass

$$Q(u, v) = (f, v)_{L^2} \qquad \text{für alle } v \in H_0^{1,2} \text{ bzw. } H^{1,2} \text{ “}$$

lösbar genau dann, wenn für alle $v \in N(A^*)$

$$(f, v)_{L^2} = 0$$

gilt, wobei

$$N(A^*) = \left\{v \in H_0^{1,2} \textit{ bzw. } H^{1,2} \,\middle|\, Q(u,v) = 0 \textit{ für alle } u \in H_0^{1,2} \textit{ bzw. } H^{1,2}\right\}.$$

Es gilt $\dim N(A^*) < \infty$ *und* $\dim N(A) < \infty$ *mit*

$$N(A) = \left\{u \in H_0^{1,2} \textit{ bzw. } H^{1,2} \,\middle|\, Q(u,v) = 0 \textit{ für alle } v \in H_0^{1,2} \textit{ bzw. } H^{1,2}\right\}.$$

Beweis : Wir wollen die Fredholmsche Alternative (Folgerung 4.7) auf den Operator $A : H \to H$ definiert in (7.27) anwenden. Mit den Bezeichnungen $\tilde{A} := A + \lambda_0 J$ und $K := -\lambda_0 J$ haben wir $A = \tilde{A} + K$. Aufgrund von (7.29) und der Bemerkung in Zusammenhang mit (7.24) sind alle Voraussetzungen von Satz 7.18 erfüllt und somit ist das Bild $A(H)$ abgeschlossen und $\dim N(A) < \infty$. Der Beweis von Satz 7.23 liefert $\dim N(A^*) < \infty$. Da das Bild $A(H)$ abgeschlossen ist, ist die Aussage von Satz 7.28 nichts anderes als eine Umformulierung von Folgerung 4.7. ∎

2.8 Das Eigenwertproblem für vollstetige lineare selbstadjungierte Operatoren

Aus der linearen Algebra wissen wir, dass jede hermitesche (=selbstadjungierte) lineare Abbildung eine vollständige Orthonormalbasis von Eigenvektoren besitzt und die Eigenwerte reell sind. Eine völlig analoge Aussage gelingt für vollstetige, lineare, selbstadjungierte Abbildungen eines Hilbertraumes in sich. Darüberhinaus erhält man noch, dass es höchstens *abzählbar viele Eigenwerte* gibt und diese *gegen Null gehen* müssen, und die *Eigenräume* mit eventueller Ausnahme des Kernes *endlich-dimensional* sind.
In diesem Abschnitt ist H immer ein Hilbertraum über $\mathbb{C}$ und $I : H \to H$ ist die Identität auf H, d.h. $Iu = u$.

8.1 Definition. *Sei $A : H \to H$ ein linearer stetiger Operator. Die **Resolventenmenge** $\rho(A)$ ist durch*

$$\rho(A) := \{\lambda \in \mathbb{C} \mid (A - \lambda I) \textit{ hat eine stetige Inverse}\}$$

*definiert. Das **Spektrum** $\sigma(A)$ von A ist die Komplementärmenge von $\rho(A)$, d.h.*

$$\sigma(A) := \mathbb{C} \setminus \rho(A).$$

*Man sagt, dass λ ein **Eigenwert** ist, wenn*

$$N(A - \lambda I) \neq \{0\}$$

und schreibt $\lambda \in EW(A)$. Man nennt $N(A - \lambda I)$ den ***Eigenraum*** *vom Eigenwert λ, und deren nichttrivialen Elemente* ***Eigenvektoren*** *zum Eigenwert λ.*

• $EW(A) \subseteq \sigma(A)$

• Wenn $\dim H = \infty$ ist, ist im Allgemeinen $EW(A) \subsetneqq \sigma(A)$. Falls $\dim H < \infty$, dann ist $EW(A) = \sigma(A)$.

• Es ist möglich, dass $N(A - \lambda I) = \{0\}$ und $R(A - \lambda I) \neq H$. Betrachte

$$A : \ell^2 \to \ell^2 : (u_n) \mapsto (0, u_1, u_2, \ldots).$$

Dann ist $0 \in \sigma(A)$ und $0 \notin EW(A)$, denn sonst wäre

$$A(u_n) = 0(u_n) = 0$$

und somit $(u_n) = 0$.
• In der Literatur wird die Resolventenmenge $\rho(A)$ oft definiert als

$$\rho(A) := \{\lambda \in \mathbb{C} \mid (A - \lambda I) \text{ ist bijektiv von } H \text{ nach } H\}.$$

Aufgrund von Satz 3.14 in Kapitel 3 ist dies äquivalent zu unserer Definition.

8.2 Satz. *Sei $A : H \to H$ linear und stetig. Das Spektrum ist eine kompakte Menge, für die gilt*

$$\sigma(A) \subseteq \overline{B_{\|A\|}(0)} \subseteq \mathbb{C}. \tag{8.3}$$

Beweis : Sei $\lambda \in \mathbb{C}$ mit $|\lambda| > \|A\|$. Wir müssen zeigen, dass dann λ in der Resolventenmenge $\rho(A)$ ist, d.h. $A - \lambda I$ eine stetige Inverse besitzt. Für $B := \lambda^{-1} A$ gilt

$$\|B\| = |\lambda|^{-1} \|A\| < 1.$$

Somit liefert Satz 3.16, dass $I - B$ eine stetige Inverse hat. Wir definieren $R_\lambda : H \to H$ durch

$$R_\lambda f := (I - B)^{-1}(-\lambda^{-1} f).$$

Offenbar ist R_λ stetig. Weiterhin gilt

$$(A - \lambda I) R_\lambda f = -\lambda (I - B) R_\lambda f = f,$$

d.h. R_λ ist die Inverse von $A - \lambda I$. Also ist (8.3) gezeigt. Es bleibt zu zeigen, dass $\rho(A)$ offen ist. Für $\lambda_0 \in \rho(A)$ bezeichnen wir die stetige Inverse von

$A - \lambda_0 I$ mit R_{λ_0}. Sei λ nahe genug an λ_0, d.h. $|\lambda - \lambda_0| \ll 1$. Wir zeigen zuerst, dass $A - \lambda I$ eine Inverse hat. Für $f \in H$ hat die Gleichung

$$Au - \lambda u = f \tag{8.4}$$

eine Lösung genau dann, wenn

$$Au - \lambda_0 u = f + \lambda u - \lambda_0 u$$

und da $\lambda_0 \in \rho(A)$ ist, muss

$$u = R_{\lambda_0}(f + (\lambda - \lambda_0)u)$$

sein. Betrachte die Abbildung

$$T : H \to H : u \mapsto R_{\lambda_0}(f + (\lambda - \lambda_0)u).$$

T ist eine Kontraktion, denn

$$\begin{aligned} \|Tu_1 - Tu_2\| &= \|R_{\lambda_0}((\lambda - \lambda_0)(u_1 - u_2))\| \\ &\leq \underbrace{\|R_{\lambda_0}\| |\lambda - \lambda_0|}_{=:k} \|u_1 - u_2\|. \end{aligned}$$

Wenn man $|\lambda - \lambda_0| < \|R_{\lambda_0}\|^{-1}$ wählt, folgt dass $k < 1$ ist. Der Banachsche Fixpunktsatz liefert die Existenz der Inverse R_λ von $A - \lambda I$. Obige Rechnung liefert auch

$$R_\lambda f = R_{\lambda_0}(f + (\lambda - \lambda_0) R_\lambda f)$$

und somit

$$(1 - |\lambda - \lambda_0| \, \|R_{\lambda_0}\|) \, \|R_\lambda f\| \leq \|R_{\lambda_0}\| \, \|f\| \, .$$

Für $|\lambda - \lambda_0| < \|R_{\lambda_0}\|^{-1}$ ist also R_λ ein beschränkter Operator, d.h. $\rho(A)$ ist offen. ■

8.5 Satz. *Sei* $\dim H = \infty$ *und sei* $K : H \to H$ *linear und vollstetig. Dann ist* $0 \in \sigma(K)$.

Beweis : Sei $0 \notin \sigma(K)$, d.h. $0 \in \rho(K)$, also hat $(K - 0I) = K$ eine stetige Inverse. Somit ist

$$I = K^{-1} \circ K$$

nach Lemma 7.8 kompakt, d.h. die Menge $\overline{B_1(0)}$ ist kompakt. Andererseits enthält H einen separablen Teilraum V mit $\dim V = \infty$. Dieser besitzt nach Satz 5.3 ein vollständiges Orthonormalsystem $\{\varphi_j\}_{j \in \mathbb{N}}$. Für dieses Orthonormalsystem gilt $\|\varphi_j\| = 1$ und $\|\varphi_j - \varphi_k\| = \sqrt{2}$, $j \neq k$. Somit ist die Folge

(φ_j) nicht relativ folgenkompakt, was ein Widerspruch zur Kompaktheit von $\overline{B_1(0)}$ ist. Also haben wir $0 \in \sigma(K)$ bewiesen. ∎

Somit ist das Spektrum eines vollstetigen Operators immer nichtleer. Für selbstadjungierte Operatoren kann man das Spektrum und die Resolventenmenge durch äquivalente Bedingungen charakterisieren. Zuerst zeigen wir, dass Eigenwerte von selbstadjungierten Operatoren reell sind.

8.6 Lemma. *Sei $A : H \to H$ selbstadjungiert. Dann gilt:*

(i) *Jeder Eigenwert von A ist reell.*

(ii) *Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten sind orthogonal.*

Beweis : (i) Sei $\lambda \in \mathbb{C}$ und $u \neq 0$ so, dass $Au = \lambda u$. Dann folgt

$$\lambda\,(u,u) = (Au,u) = (u,A^*u) = (u,Au) = \overline{\lambda}\,(u,u).$$

Somit ist $\lambda = \overline{\lambda}$, d.h. $\lambda \in \mathbb{R}$.
(ii) Gilt $Au = \lambda u,\ Av = \mu v$, mit $\lambda \neq \mu \in \mathbb{R}$, $u, v \neq 0$, so folgt

$$\lambda\,(u,v) = (Au,v) = (u,Av) = (u,\mu v) = \overline{\mu}\,(u,v) = \mu\,(u,v),$$

woraus $(u,v) = 0$ folgt. ∎

8.7 Satz. *Sei $A : H \to H$ ein linearer, selbstadjungierter, stetiger Operator. Dann gehört $\lambda \in \mathbb{C}$ zur Resolventenmenge $\rho(A)$ genau dann, wenn es eine Konstante $c > 0$ gibt, so dass für alle $u \in H$*

$$\|Au - \lambda u\| \geq c\,\|u\|\,. \tag{8.8}$$

Beweis : " $\Rightarrow$ " : Sei $\lambda \in \rho(A)$ und sei R_λ die stetige Inverse von $A - \lambda I$. Für $u \in H$ gilt

$$\|u\| = \|R_\lambda((A-\lambda I)u)\| \leq \|R_\lambda\|\,\|Au - \lambda u\|$$

und somit ist (8.8) mit $c = \|R_\lambda\|^{-1}$ erfüllt.
" $\Leftarrow$ " : Sei $\lambda \in \mathbb{C}$ derart, dass (8.8) gilt. Sei $V := R(A - \lambda I)$ das Bild von $(A - \lambda I)$. Wir wollen $V = H$ zeigen. Dazu zeigen wir zuerst, dass V in H dicht ist. Falls dies nicht der Fall wäre, würde nach Folgerung 2.7 ein Element $0 \neq u_0 \in V^\perp$ existieren. Also gilt für alle $u \in H$

$$(u_0, Au - \lambda u) = 0,$$

und da A selbstadjungiert ist auch für alle $u \in H$

$$(Au_0 - \overline{\lambda}u_0, u) = 0,$$

d.h. $Au_0 - \overline{\lambda} u_0 = 0$. Somit ist $\overline{\lambda}$ ein Eigenwert von A und aufgrund von Lemma 8.6 reell, d.h. $\lambda = \overline{\lambda}$. Aus (8.8) folgt dann

$$0 = \|Au_0 - \lambda u_0\| \geq c \|u_0\|,$$

d.h. $u_0 = 0$, ein Widerspruch.
Wir zeigen nun, dass V abgeschlossen ist. Sei $v_n := Au_n - \lambda u_n$ eine Folge aus V mit $v_n \to v_0 \in H$. Aus (8.8) folgt für alle $m, n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}\|u_n - u_m\| &\leq \frac{1}{c} \|Au_n - \lambda u_n - Au_m + \lambda u_m\| \\ &= \frac{1}{c} \|v_n - v_m\| \to 0 \qquad (m, n \to \infty),\end{aligned}$$

d.h. $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist eine Cauchyfolge mit Grenzwert u_0. Da A und I stetig sind, muss also $Au_0 - \lambda u_0 = v_0$ gelten, d.h. $v_0 \in V$. Also ist V abgeschlossen. Aufgrund der Dichtheit von V haben wir also $V = H$ gezeigt.
Aus (8.8) folgt, dass $A - \lambda I$ auf H eine eindeutig definierte Inverse R_λ hat. In der Tat, gelte für $u_1, u_2 \in H$

$$Au_1 - \lambda u_1 = Au_2 - \lambda u_2.$$

Dies ist äquivalent zu

$$A(u_1 - u_2) - \lambda(u_1 - u_2) = 0$$

und (8.8) liefert

$$\|u_1 - u_2\| \leq c^{-1} \|A(u_1 - u_2) - \lambda(u_1 - u_2)\| = 0.$$

Aus (8.8) folgt auch

$$\|R_\lambda u\| \leq c^{-1} \|(A - \lambda I)R_\lambda u\| = c^{-1} \|u\|,$$

d.h. R_λ ist stetig und somit ist $\lambda \in \rho(A)$. ∎

8.9 Folgerung. *Sei $A : H \to H$ ein selbstadjungierter, linearer, stetiger Operator. Dann gehört $\lambda \in \mathbb{C}$ zum Spektrum $\sigma(A)$ genau dann, wenn eine Folge (u_n) mit $\|u_n\| = 1$ existiert so, dass*

$$\|Au_n - \lambda u_n\| \to 0 \qquad (n \to \infty).$$

Beweis : Aus Satz 8.7 folgt sofort dass $\lambda \in \sigma(A)$, genau dann, wenn es eine Folge (v_n) gibt mit

$$\|Av_n - \lambda v_n\| \leq \frac{1}{n} \|v_n\|.$$

Multiplizieren mit $\|v_n\|^{-1}$ liefert die Behauptung für $u_n := v_n / \|v_n\|$. ∎
Wir können nun Satz 8.2 für selbstadjungierte Operatoren verschärfen.

8.10 Satz. *Für das Spektrum eines selbstadjungierten, linearen, stetigen Operators gilt*

$$\sigma(A) \subseteq \big[-\|A\|, \|A\|\big] \subset \mathbb{R}. \tag{8.11}$$

Beweis : Wir zeigen, dass alle komplexen Zahlen $\lambda = \alpha + \mathrm{i}\,\beta$, $\beta \neq 0$ Elemente der Resolventenmenge $\rho(A)$ sind. Für $u \in H$ und $v := Au - \lambda u$ gilt

$$\begin{aligned}(v,u) &= (Au,u) - \lambda(u,u),\\ (u,v) &= \overline{(v,u)} = (Au,u) - \overline{\lambda}(u,u),\end{aligned}$$

da A selbstadjungiert ist und somit $(Au,u) \in \mathbb{R}$. Somit gilt

$$(u,v) - (v,u) = (\lambda - \overline{\lambda})(u,u) = 2\beta\,\mathrm{i}\,\|u\|^2,$$

woraus

$$2\,|\beta|\,\|u\|^2 = |(u,v) - (v,u)| \le 2\,\|Au - \lambda u\|\,\|u\|$$

folgt. Also ist Bedingung (8.8) mit $c = 2\,|\beta| > 0$ erfüllt und Satz 8.7 liefert, dass $\lambda \in \rho(A)$. Dies und Satz 8.2 liefern die Behauptung. ∎

Für einen selbstadjungierten, linearen und stetigen Operator $A : H \to H$ setzen wir

$$\begin{aligned} m(A) = m &:= \inf_{u\in H,\,\|u\|=1} (Au,u),\\ M(A) = M &:= \sup_{u\in H,\,\|u\|=1} (Au,u). \end{aligned} \tag{8.12}$$

8.13 Satz. *Sei $A : H \to H$ selbstadjungiert, linear und stetig. Dann gilt $\sigma(A) \subseteq [m(A), M(A)]$ und $m(A), M(A) \in \sigma(A)$.*

Beweis : (i) Sei $\lambda > M$, dann ist für alle $u \in H$

$$(Au - \lambda u, u) = \big(A\tfrac{u}{\|u\|}, \tfrac{u}{\|u\|}\big)\,\|u\|^2 - \lambda\,\|u\|^2 \le (M - \lambda)\,\|u\|^2.$$

Hieraus folgt

$$0 < (\lambda - M)\,\|u\|^2 \le |(Au - \lambda u, u)| \le \|Au - \lambda u\|\,\|u\|,$$

d.h. (8.8) ist mit $c = (\lambda - M)$ erfüllt und somit ist $\lambda \in \rho(A)$. Der Fall $\lambda < m$ wird analog behandelt.

(ii) Um $m \in \sigma(A)$ zu zeigen, definieren wir $a(\cdot,\cdot) : H \times H \to \mathbb{C}$ durch

$$a(u,v) := (Au - mu, v).$$

Da A selbstadjungiert ist, ist $a(\cdot,\cdot)$ eine hermitische Sesquilinearform. Aus der Definition von m folgt für alle $u \in H$

$$(Au, u) = (A\tfrac{u}{\|u\|}, \tfrac{u}{\|u\|}) \|u\|^2 \geq m \|u\|^2 ,$$

woraus

$$a(u,u) \geq 0$$

folgt. Also ist $a(\cdot,\cdot)$ eine positiv semidefinite Sesquiliniearform auf H. Die Cauchy-Schwarzsche Ungleichung für $a(\cdot,\cdot)$ ergibt:

$$|a(u,v)| \leq a(u,u)^{\frac{1}{2}} a(v,v)^{\frac{1}{2}},$$

also gilt für alle $u, v \in H$:

$$\begin{aligned}|(Au - mu, v)| &\leq (Au - mu, u)^{\frac{1}{2}} (Av - mv, v)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq (Au - mu, u)^{\frac{1}{2}} (|m| + \|A\|)^{\frac{1}{2}} \|v\| ,\end{aligned}$$

wobei wir im letzten Schritt die Cauchy-Schwarzsche Ungleichung für $(\cdot,\cdot)$ benutzt haben. Wähle $v = Au - mu$, dann ist

$$\|Au - mu\|^2 \leq c(Au - mu, u)^{\frac{1}{2}} \|Au - mu\| ,$$

d.h.

$$\|Au - mu\| \leq c(Au - mu, u)^{\frac{1}{2}}. \tag{8.14}$$

Wegen der Definition von m gibt es eine Folge $(u_n) \subseteq H$ mit $\|u_n\| = 1$ und $(Au_n, u_n) \to m$ und wegen (8.14) folgt

$$\|Au_n - mu_n\| \to 0.$$

Folgerung 8.9 liefert also $m \in \sigma(A)$.
(iii) Die Aussagen für M folgen analog, wenn man die Sesquilinearform $\tilde{a}(\cdot,\cdot) : H \times H \to \mathbb{C}$ gegeben durch

$$\tilde{a}(u,v) := (Mu - Au, v)$$

betrachtet. ■

8.15 Folgerung. *Sei $A : H \to H$ linear, stetig und selbstadjungiert. Dann ist das Spektrum $\sigma(A)$ nicht leer.*

8.16 Folgerung. *Sei $A : H \to H$ linear, stetig und selbstadjungiert mit $\sigma(A) = \{0\}$. Dann ist $A = 0$.*

Beweis : Wegen Satz 8.13 gilt sowohl $\inf\limits_{\|u\|=1}(Au,u) \in \sigma(A)$ als auch $\sup\limits_{\|u\|=1}(Au,u) \in \sigma(A)$. Für alle $u \in H$ ist also $(Au,u) = 0$. Insbesondere ist also $(A(u+v),u+v) = 0$ für alle $u,v \in H$. Somit gilt

$$0 = (Au,u) + (Av,v) + 2\mathcal{R}e(Au,v) = 2\mathcal{R}e(Au,v).$$

Aus $(A(u+\mathrm{i}\,v),u+\mathrm{i}\,v) = 0$ folgt analog $\mathcal{I}m(Au,v) = 0$. Wir erhalten also $Au = 0$ für alle $u \in H$, d.h. $A = 0$. ∎

8.17 Satz. *Sei $K : H \to H$ linear, selbstadjungiert und vollstetig. Dann gilt:*

$$\sigma(K) \setminus \{0\} = EW(K) \setminus \{0\},$$

d.h. jedes von Null verschiedene Element des Spektrums ist ein Eigenwert.

Beweis : Es gilt immer $EW(K) \subseteq \sigma(K)$. Sei $\lambda \in \sigma(K) \setminus \{0\}$. Folgerung 8.9 liefert die Existenz einer Folge $(u_n) \subseteq H$ mit $\|u_n\| = 1$ und $\|Ku_n - \lambda u_n\| \to 0$. Für $v_n := Ku_n - \lambda u_n$ gilt also $v_n \to 0$ und

$$u_n = \lambda^{-1}(Ku_n - v_n). \tag{8.18}$$

Da K vollstetig ist, gibt es eine Teilfolge (u_n) so, dass Ku_n konvergiert. Aus (8.18) folgt, dass dann auch u_n konvergiert und zwar gegen ein $u_0 \in H$. Da K insbesondere stetig ist, konvergiert Ku_n gegen Ku_0. Aus (8.18) und $v_n \to 0$ folgt also

$$u_0 = \lambda^{-1}Ku_0,$$

d.h. u_0 ist ein Eigenvektor zum Eigenwert λ. Man beachte, dass $\|u_0\| = 1$ gilt. ∎

8.19 Folgerung. *Sei $K : H \to H$ linear, selbstadjungiert und vollstetig. Falls $K \neq 0$, dann existiert mindestens ein Eigenwert.*

Beweis : Folgerung 8.16 und Satz 8.5 implizieren, dass $\sigma(K)$ nicht nur aus der Null besteht. Die Behauptung folgt also aus Satz 8.17. ∎

Man kann sogar zeigen, dass entweder $\|K\|$ oder $-\|K\|$ ein Eigenwert ist. Dazu benötigen wir folgendes Resultat.

8.20 Lemma. *Sei $A : H \to H$ linear, stetig und selbstadjungiert. Dann gilt:*

$$\|A\| = \sup_{\|u\|=1} |(Au,u)| = \max\left(|m(A)|, |M(A)|\right). \tag{8.21}$$

Beweis : Wir setzen $C_A := \sup_{\|u\|=1} |(Au,u)|$. Für alle $u \in H$ gilt

$$|(Au,u)| \le \|Au\| \, \|u\| \le \|A\| \, \|u\|^2 ,$$

woraus sofort $C_A \le \|A\|$ folgt. Weiterhin haben wir für alle $u, v \in H$

$$\begin{aligned}(A(u+v), u+v) &= (Au,u) + (Av,v) + 2\mathcal{R}e(Au,v),\\ (A(u-v), u-v) &= (Au,u) + (Av,v) - 2\mathcal{R}e(Au,v).\end{aligned}$$

Hieraus folgt

$$4\mathcal{R}e(Au,v) = (A(u+v), u+v) - (A(u-v), u-v). \tag{8.22}$$

Weiter gilt

$$(Au,u) = \left(A\tfrac{u}{\|u\|}, \tfrac{u}{\|u\|}\right) \|u\|^2 \le C_A \|u\|^2 ,$$

was zusammen mit (8.22)

$$\begin{aligned}|\mathcal{R}e(Au,v)| &\le \frac{C_A}{4}\left(\|u+v\|^2 + \|u-v\|^2\right)\\ &= \frac{C_A}{2}\left(\|u\|^2 + \|v\|^2\right)\end{aligned} \tag{8.23}$$

liefert, wobei wir auch (1.3) benutzt haben. Falls $Au \neq 0$ ist, setzen wir $v = \frac{\|u\|}{\|Au\|} Au$ und erhalten mit Hilfe von (8.23)

$$\|u\| \, \|Au\| = |\mathcal{R}e(Au,v)| \le \frac{C_A}{2}\left(\|u\|^2 + \|v\|^2\right) = C_A \|u\|^2 ,$$

d.h. $\|Au\| \le C_A \|u\|$. Dies gilt trivialerweise auch für $Au = 0$. Somit haben wir gezeigt, dass $\|A\| \le C_A$. Insgesamt gilt also die 1. Gleichheit in (8.21). Die 2. Gleichheit in (8.21) folgt sofort aus der Definition von $m(A)$ und $M(A)$ (vgl. (8.12)). ∎

8.24 Satz. *Sei $K : H \to H$ linear, selbstadjungiert und vollstetig. Dann existiert ein Eigenwert $\lambda \in \mathbb{R}$ mit $|\lambda| = \|K\|$ sowie ein dazugehöriger Eigenvektor $u \in H$ mit $\|u\| = 1$ und*

$$|(Ku,u)| = \sup_{\|v\|=1} |(Kv,v)| . \tag{8.25}$$

λ ist der betragsmäßig größte Eigenwert von K.

Beweis : Falls $K = 0$ sind die Aussagen trivial. Sei also $K \neq 0$, d.h. $\|K\| > 0$. Wir wissen aufgrund von Lemma 8.20, dass

$$\|K\| = \max\left(|m(K)|, |M(K)|\right),$$

wobei $m(K), M(K)$ in (8.12) definiert sind. Demzufolge existiert eine Folge $(u_n) \subseteq H$ mit $\|u_n\| = 1$ und

$$(Ku_n, u_n) \to \lambda,$$

wobei $\lambda \in \mathbb{R}$ und $|\lambda| = \|K\|$. Daraus folgt

$$\begin{aligned} 0 \le \|Ku_n - \lambda u_n\|^2 &= \|Ku_n\|^2 - 2\lambda(Ku_n, u_n) + \lambda^2 \|u_n\|^2 \\ &\le \|K\|^2 - 2\lambda(Ku_n, u_n) + \lambda^2 \to 0, \end{aligned}$$

d.h.

$$Ku_n - \lambda u_n \to 0. \tag{8.26}$$

Da K vollstetig ist, konvergiert eine Teilfolge Ku_n und somit konvergiert auch u_n gegen ein u_0, da $\lambda \neq 0$. Wir haben $\|u_0\| = 1$ und auf Grund der Stetigkeit von K, gilt auch $Ku_n \to Ku_0$. Aus (8.26) folgt also

$$Ku_0 = \lambda u_0,$$

d.h. u_0 ist ein Eigenvektor zum Eigenwert λ, mit $|\lambda| = \|K\|$. Weiter gilt

$$|(Ku_0, u_0)| = |\lambda|\,(u_0, u_0) = \|K\|,$$

was zusammen mit Lemma 8.20 die Identität (8.25) liefert.
Sei $\mu \in \mathbb{R}$ ein weiterer Eigenwert von K und u ein zugehöriger Eigenvektor mit $\|u\| = 1$. Dann gilt

$$|\mu| = |(\mu u, u)| = |(Ku, u)| \le \sup_{\|v\|=1} |(Kv, v)|.$$

Dies liefert die verbleibende Behauptung. ■

Bevor wir weitere Eigenwerte konstruieren, beweisen wir zwei Eigenschaften von Eigenwerten.

8.27 Lemma. *Sei $K : H \to H$ linear und vollstetig. Sei $\lambda \in \mathbb{C}$ ein beliebiger, von Null verschiedener Eigenwert. Dann ist der Eigenraum $V = N(K - \lambda I)$ zu λ endlich-dimensional.*

Beweis : Wenn V endlich-dimensional ist, ist nichts zu beweisen. Falls $\dim V = \infty$, so gibt es einen separablen Teilraum V_0 mit $\dim V_0 = \infty$, und V_0 besitzt ein vollständiges Orthonormalsystem $\{\varphi_j\}_{j\in\mathbb{N}}$. Da K vollstetig ist und damit kompakt ist und die Menge der φ_j beschränkt ist, wird sie von K in eine relativ kompakte Menge überführt. Andererseits gilt $K\varphi_j = \lambda\varphi_j$, also ist auch die Menge der φ_j relativ kompakt (beachte, dass hier $\lambda \neq 0$ benutzt wird). Dies ist jedoch wie im Beweis von Satz 8.5 nicht möglich, also war die Annahme $\dim V = \infty$ falsch. ∎

Mit einer ähnlichen Methode beweist man:

8.28 Lemma. *Sei $K : H \to H$ linear, selbstadjungiert und vollstetig. Dann gibt es keinen von Null verschiedenen Häufungswert von paarweise verschiedenen Eigenwerten von K.*

Beweis : Sei $Kv_j = \lambda_j v_j$ mit $v_j \in H$, $\|v_j\| = 1$, $\lambda_j \neq \lambda_k \neq 0$ für $j \neq k$, $\lambda_j \in \mathbb{R}$, $\lambda_j \to \lambda \neq 0$ $(j \to \infty)$, $\lambda \in \overline{\mathbb{R}}$. Da (v_j) beschränkt ist, ist auch die Folge $(\lambda_j^{-1} v_j)$ beschränkt (hierbei wurde $\lambda_j \to \lambda \neq 0$ benutzt) und somit ist die Folge $(\lambda_j^{-1} K v_j)$ relativ kompakt. Daher ist auch die Folge (v_j) relativ kompakt. Nach Lemma 8.6 gilt $v_j \perp v_k$ für $j \neq k$. Die $\{v_j\}$ müssen daher ein abzählbar unendliches Orthonormalsystem bilden, welches nicht relativ kompakt sein kann - siehe Beweis von Satz 8.5. Dies ist ein Widerspruch und somit ist Null der einzig mögliche Häufungspunkt. ∎

• Das Lemma besagt, dass Punkte von $EW(K) \setminus \{0\}$ isoliert sind.

Basierend auf Satz 8.24 geben wir nun ein Verfahren an, um alle von Null verschiedenen Eigenwerte zu konstruieren. Sei $K : H \to H$ ein linearer, selbstadjungierter und vollstetiger Operator.

• Falls $K = 0$ ist $\lambda = 0$ Eigenwert und der Kern $N(K) = H$ der zugehörige Eigenraum.

• Falls $K \neq 0$, dann existiert nach Satz 8.24 ein Eigenwert $\lambda_1 \neq 0$ mit $|\lambda_1| = \|K\|$. Dies ist der betragsmäßig größte Eigenwert von K. Wir setzen

$$\begin{aligned} V_1^+ &:= N(K - \lambda_1 I), \\ V_1^- &:= N(K + \lambda_1 I), \\ H_1 &:= V_1^+ \oplus V_1^-. \end{aligned}$$

Es kann sein, dass $V_1^- = \{0\}$. Falls dies nicht der Fall ist, gilt $V_1^+ \perp V_1^-$ und beide Räume sind endlich dimensional. Es gilt immer $1 \leq \dim H_1 < \infty$. Um weitere Eigenwerte zu konstruieren benutzen wir, dass H_1 unter K invariant ist, d.h. $K(H_1) \subseteq H_1$. In der Tat, jedes $u \in H_1$ hat eine Darstellung $u = \alpha^+ u^+ + \alpha^- u^-$ mit $\alpha^+, \alpha^- \in \mathbb{C}$ und $u^+ \in V_1^+, u^- \in V_1^-$. Also gilt

$$Ku = \alpha^+ K u^+ + \alpha^- K u^- = \alpha^+ \lambda_1 u^+ - \alpha^- \lambda_1 u^- \in H_1.$$

Außerdem ist $K(H_1^\perp) \subseteq H_1^\perp$, denn für alle $u \in H_1^\perp$ und $v \in H_1$ gilt

$$(Ku, v) = (u, Kv) = 0.$$

Der Operator

$$K_1 := K|_{H_1^\perp} : H_1^\perp \to H_1^\perp$$

ist somit wohldefiniert und offensichtlich vollstetig, selbstadjungiert und linear. Nun können wieder 2 Fälle auftreten. Entweder $K_1 = 0$ oder $K_1 \neq 0$. Im ersten Fall ist $H_1^\perp$ der Eigenraum zum Eigenwert $\lambda = 0$ und es gilt $H_1^\perp = N(K)$. Es gilt insbesondere

$$H = H_1 \oplus N(K).$$

Unser Verfahren bricht dann hier ab. Falls $K_1 \neq 0$ liefert Satz 8.24 die Existenz eines Eigenwertes $\lambda_2 \neq 0$ mit $|\lambda_2| = \|K_1\|$ und eines zugehörigen Eigenvektors $u \in H_1^\perp$ mit $\|u\| = 1$. Insbesondere ist λ_2 auch ein Eigenwert von K, da $u \in H_1^\perp$ und somit

$$\lambda_2 u = K_1 u = Ku.$$

Satz 8.24 liefert auch $|\lambda_2| \leq |\lambda_1|$. Falls $|\lambda_2| = |\lambda_1| = \|K\|$ dann ist u aber auch ein Element von H_1. Dies ist aber ein Widerspruch zu $\|u\| = 1$, denn $u \in H_1^\perp \cap H_1 = \{0\}$. Wir haben also

$$|\lambda_2| < |\lambda_1|$$

gezeigt. Weiterhin gibt es keine weiteren Eigenwerte λ von K mit $|\lambda_1| > |\lambda| > |\lambda_2|$. Sei dies falsch und sei V der zu λ gehörende Eigenraum. Die zweite Aussage in Lemma 8.6 liefert $V \perp H_1$. Somit gilt für $v \in V$ mit $\|v\| = 1$:

$$|\lambda| = |(Kv, v)| = |(K_1 v, v)| \leq \sup\left\{ |(K_1 z, z)| \,\middle|\, z \in H_1^\perp,\ \|z\| = 1 \right\} = |\lambda_2|\,.$$

Dies ist ein Widerspruch.
Wir setzen nun

$$\begin{aligned} V_2^+ &:= N(K - \lambda_2 I), \\ V_2^- &:= N(K + \lambda_2 I), \\ H_2 &:= V_2^+ \oplus V_2^-. \end{aligned}$$

Es kann wiederum sein, dass $V_2^- = \{0\}$. Man beachte $H_2 \subseteq H_1^\perp$ und $1 \leq \dim H_2 < \infty$. Wie oben zeigt man $K_1(H_2) \subseteq H_2$ sowie $K_1(H_2^\perp) \subseteq H_2^\perp$. Demzufolge ist der Operator[5]

$$K_2 := K_1|_{H_2^\perp} : H_2^\perp \to H_2^\perp$$

[5] Das Symbol $\perp$ ist natürlich bzgl. des Hilbertraumes $H_1^\perp$ gemeint.

wohldefiniert sowie vollstetig, selbstadjungiert und linear. Man beachte, dass $K_2 = K|_{(H_1 \oplus H_2)^\perp}$ und

$$H = H_1 \oplus H_2 \oplus H_2^\perp.$$

Somit hat K_2 analoge Eigenschaften wie K_1 und wir können dieselben Überlegungen wiederholen.
Das Verfahren bricht nach endlich vielen Schritten ab, wenn der Raum H endlich-dimensional ist, oder wenn $\lambda_N = 0$. Wenn $\dim H = \infty$ und $\lambda_N = 0$ liegt ein unendlich- dimensionaler Nullraum vor. Der Standardfall ist jedoch, dass das Verfahren nicht abbricht und wir abzählbar unendlich viele Eigenwerte $\pm\lambda_j$, $j \in \mathbb{N}$, mit $|\lambda_j| > |\lambda_{j-1}|$ erhalten. Ferner ist noch zusätzlich der Eigenwert Null möglich. Die Eigenwerte λ_j müssen wegen Lemma 8.28 gegen Null gehen.

Nun haben wir alle Hilfsmittel zusammen um den Spektralsatz zu beweisen.

8.29 Satz. *Sei $K : H \to H$ ein linearer, selbstadjungierter, vollstetiger Operator. Dann existiert eine möglicherweise endliche Folge von von Null verschiedenen Eigenwerten $(\pm\lambda_j)$, $j \geq 1$. Seien H_j, $j \geq 1$, die zugehörigen oben konstruierten "Eigenräume" und $H_0 := N(K)$. Dann gilt:*

$$H = H_0 \oplus \Big(\bigoplus_{j \geq 1} H_j \Big) \tag{8.30}$$

Falls die Folge $(\pm\lambda_j)$ unendlich ist, ist $|\lambda_j|$ eine Nullfolge, d.h. $|\lambda_j| \searrow 0$.

Der Raum $\bigoplus_{j\geq 1} H_j$ besteht aus allen konvergenten Reihen $\sum_{j\geq 1} \alpha_j^+ v_j^+ + \alpha_j^- v_j^-$, wobei $\alpha_j^+, \alpha_j^- \in \mathbb{C}$ und $v_j^\pm \in V_j^\pm$. Sei $\dim V_j^\pm =: N^\pm(j)$. Falls $N^\pm(j) \neq 0$ seien $(u_{j,\ell}^\pm)_{\ell=1,\dots,N^\pm(j)}$ vollständige Orthonormalsysteme von $V_j^\pm$. Damit bildet $(u_{j,\ell}^\pm)_{j\geq 1,\, \ell=1,\dots,N^\pm(j)}$ ein vollständiges Orthonormalsystem von $N(K)^\perp = H_0^\perp$.

Beweis (Satz 8.29): (i) Falls $K = 0$, dann ist $\lambda = 0$ der einzige Eigenwert, d.h. $H_j = \{0\}$ für alle $j \geq 1$. Da $N(K) = H$ ist (8.30) trivial.
(ii) Falls $K \neq 0$ führen die oben beschriebene Konstruktion durch. Falls die Konstruktion abbricht haben wir bereits in der obigen Diskussion gezeigt, dass (8.30) gilt. Breche die Konstruktion also nicht ab. Angenommen

$$V := H_0 \oplus \Big(\bigoplus_{j \geq 1} H_j \Big) \neq H.$$

Der Raum V ist unter K invariant. Sei $(u_j)_{j\in\mathbb{N}}$ das oben beschriebene vollständige Orthonormalsystem von $H_0^\perp$. Dann hat jedes $u \in V$ eine Darstellung

$$u = u_0 + \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j u_j,$$

mit $u_0 \in H_0$, $\alpha_j \in \mathbb{C}$, $\sum\limits_{j=1}^{\infty} |\alpha_j|^2 < \infty$. Seien λ_j die zu u_j zugehörigen Eigenwerte. Dann gilt aufgrund der Stetigkeit von K

$$Ku = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j \alpha_j u_j \in \bigoplus_{n\geq 1} H_n.$$

Man beachte, dass diese Reihe konvergiert, da $|\lambda_j| \leq \|K\|$. Wir erhalten weiter $K(V^\perp) \subseteq V^\perp$, denn für $u \in V$ und $v \in V^\perp$ gilt:

$$(Kv, u) = (v, Ku) = 0.$$

Also ist der Operator

$$\widetilde{K} := K|_{V^\perp} : V^\perp \to V^\perp$$

wohldefiniert sowie vollstetig, selbstadjungiert und linear. Falls $\widetilde{K} = 0$ erhalten wir $V^\perp \subset H_0 = N(K) \subset V$, was $V^\perp = \{0\}$ impliziert. Dies ist ein Widerspruch zu $V \neq H$.

Falls $\widetilde{K} \neq 0$ liefert Satz 8.24 die Existenz eines Eigenwertes $\lambda \neq 0$. Falls $|\lambda| = |\lambda_n|$ für ein $n \geq 1$, so folgt $N(K - \lambda I) \subseteq V^\perp$ und $N(K - \lambda I) \subseteq V$, d.h. $N(K - \lambda I) = \{0\}$, ein Widerspruch.

Falls $|\lambda| \neq |\lambda_j|$, $j \geq 1$, dann impliziert $|\lambda_n| \searrow 0$, dass es ein $n_0 \geq 1$ gibt mit $|\lambda_{n_0}| > |\lambda| > |\lambda_{n_0 - 1}|$. Wir haben aber bereits gezeigt, dass dies nicht möglich ist. Demzufolge haben wir die Annahme $V \neq H$ in allen Fällen zum Widerspruch geführt, d.h. $V = H$ und der Satz ist bewiesen. ∎

Anwendung auf elliptische Differentialoperatoren. Wir betrachten das Rand-Eigenwertproblem für elliptische Differentialoperatoren der Gestalt

$$-\sum_{i,k=1}^{n} D_i(a_{ik} D_k u) + c\, u$$

auf einen beschränkten Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Es sei $c \in L^\infty(\Omega)$, und die Koeffizienten $a_{ik} \in L^\infty(\Omega)$ seien *symmetrisch*, d.h. $a_{ik} = a_{ki}$, und elliptisch, d.h. es existiert Konstante $\alpha_0 > 0$, so dass für alle $\xi \in \mathbb{R}^n$ und fast alle $x \in \Omega$ gilt

$$\sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}(x)\, \xi_i\, \xi_k \geq \alpha_0 |\xi|^2 . \tag{8.31}$$

Wir betrachten das Eigenwertproblem

$$\begin{aligned} -\sum_{i,k=1}^{n} D_i(a_{ik}D_k u) + c\,u = \lambda u \quad & \text{in } \Omega\,, \\ u = 0 \quad & \text{auf } \partial\Omega\,. \end{aligned} \tag{8.32}$$

In der schwachen Formulierung lautet dies: Gesucht ist $u \in H_0^{1,2}(\Omega)$ so, dass

$$(Au, \varphi)_{H_0^{1,2}} := \sum_{i,k=1}^{n} (a_{ik}D_k u, D_i\varphi)_{L^2} + (c\,u, \varphi)_{L^2} = \lambda(u, \varphi)_{L^2} \quad \forall \varphi \in H_0^{1,2}(\Omega)\,.$$

Aus den Voraussetzungen an c und a_{ik} folgt sofort, dass $A : H_0^{1,2} \to H_0^{1,2}$ ein linearer, stetiger und selbstadjungierter Operator ist, der die Gårdingsche Ungleichung (Satz 7.26)

$$(Au, u)_{H_0^{1,2}} \geq \alpha \|u\|_{H^{1,2}}^2 - \lambda_0 \|u\|_{L^2}^2 \tag{8.33}$$

mit Konstanten $\alpha, \lambda_0 > 0$ erfüllt. Sei $J : H_0^{1,2} \to H_0^{1,2}$ der nach Lemma 7.12 vollstetige, lineare Operator mit

$$(Ju, v)_{H_0^{1,2}} := (u, v)_{L^2}\,.$$

Man überlegt sich leicht, dass auch J selbstadjungiert ist. Die Ungleichung (8.33) kann man also schreiben als

$$\big((A + \lambda_0 J)u, u\big)_{H_0^{1,2}} \geq \alpha \|u\|_{H^{1,2}}^2\,. \tag{8.34}$$

Die schwache Formulierung des Eigenwertproblems (8.32) lautet: Gesucht ist $u \in H_0^{1,2}$ mit

$$Au = \lambda Ju \qquad \text{in } H_0^{1,2}\,. \tag{8.35}$$

Das Eigenwertproblem (8.35) formulieren wir mit Hilfe von J äquivalent um:

$$(A + \lambda_0 J)u = (\lambda + \lambda_0)Ju \qquad \text{in } H_0^{1,2}\,.$$

Mit den Bezeichnungen

$$B := A + \lambda_0 J\,, \quad \mu := \lambda + \lambda_0$$

lautet das Eigenwertproblem also

$$Bu = \mu Ju \qquad \text{in } H_0^{1,2}\,, \tag{8.36}$$

wobei $B : H_0^{1,2} \to H_0^{1,2}$ ein linearer, stetiger und selbstadjungierter Operator ist. Man nennt einen Operator $D : H \to H$ **positiv**, wenn für alle $u \in H$ gilt

$$(Du, u) \geq 0 \,.$$

Aus (8.34) folgt, dass B positiv ist. Auf Grund der Eigenschaften von B kann man zeigen (siehe Übungsblatt), dass es einen eindeutig bestimmten linearen, beschränkten, selbstadjungierten positiven Operator $C : H_0^{1,2} \to H_0^{1,2}$ mit

$$C^2 = B \qquad \text{in } H_0^{1,2}$$

gibt. Dieser Operator, den wir mit $B^{\frac{1}{2}}$ bezeichnen, besitzt eine lineare, stetige Inverse $B^{-\frac{1}{2}}$. Dies folgt aus Satz 8.7 mit $\lambda = 0$ und

$$\|B^{\frac{1}{2}}u\|^2_{H_0^{1,2}} = (B^{\frac{1}{2}}u, B^{\frac{1}{2}}u)_{H_0^{1,2}} = (Bu, u)_{H_0^{1,2}} \geq \alpha \|u\|^2_{H^{1,2}} \,,$$

wobei wir die Selbstadjungiertheit von $B^{\frac{1}{2}}$ und (8.34) benutzt haben. Da die Inverse eines selbstadjungierten Operators wieder selbstadjungiert ist, erhalten wir, dass $B^{-\frac{1}{2}}$ selbstadjungiert ist. Mit der Bezeichnung $v := B^{\frac{1}{2}}u$ formen wir (8.36) um in

$$\mu^{-1} v = B^{-\frac{1}{2}} J B^{-\frac{1}{2}} v \,. \tag{8.37}$$

Die Abbildung $B^{-\frac{1}{2}}$ ist linear, beschränkt und selbstadjungiert, die Abbildung J ebenfalls; überdies ist J kompakt. Damit ist die Abbildung

$$K := B^{-\frac{1}{2}} J B^{-\frac{1}{2}}$$

linear, vollstetig und selbstadjungiert, und wir können die in diesem Paragraph entwickelte Theorie anwenden. Zur Vereinfachung ist es nützlich zu wissen, dass die Kerne $N(K)$ und $N(J)$ verschwinden.

8.38 Lemma.

$$N(K) = \{0\} \,, \quad N(J) = \{0\} \,.$$

Beweis : Es ist $(Ju, v)_{H_0^{1,2}} = (u, v)_{L^2}$. Aus $u \in N(J)$, folgt

$$(u, v)_{L^2} = 0 \qquad \text{für alle } v \in H_0^{1,2}(\Omega) \,.$$

Daraus folgt sofort $u = 0$, da $C_0^\infty(\Omega)$ dicht in $H_0^{1,2}(\Omega)$ ist. Da $B^{-\frac{1}{2}}$ invertierbar, folgt auch $N(K) = 0$. ∎

Wir haben also das Eigenwertproblem (8.32) umformuliert in

$$Ku = \mu^{-1} u \quad \text{in } H_0^{1,2}(\Omega) \,,$$

$N(K) = \{0\}$, $K = K^*$, K kompakt. Aus Lemma 8.38 sowie Satz 8.29 und den Lemmata 8.6, 8.27, 8.28 erhalten wir:

8.39 Satz. *Das elliptische Rand-Eigenwertproblem (8.32) besitzt - unter den an a_{ik} und c genannten Voraussetzungen - abzählbar-unendlich viele Eigenwerte ν_j. Die Eigenwerte sind reell und gehen gegen unendlich. Die Dimension der Eigenräume V_j ist endlich, Eigenräume zu verschiedenen Eigenwerten sind orthogonal. Die Gesamtheit der Eigenvektoren ist vollständig in $H_0^{1,2}(\Omega)$.*

Beweis : Die Zahl ν ist genau dann Eigenwert des Problems (8.32), wenn die Zahl $\frac{1}{\nu+\lambda_0}$ Eigenwert von $K = B^{-\frac{1}{2}} J B^{-\frac{1}{2}}$ ist. Da die Eigenwerte von K gegen Null gehen, d.h. $\frac{1}{\nu_j+\lambda_0} \to 0$, folgt $|\nu_j| \to \infty$, und da $(Ku, u) \geq 0$, gilt $\nu_j \to \infty$ $(j \to \infty)$ für die Eigenwerte ν_j von (8.32). ∎

Selbstverständlich lässt sich ein analoger Satz für $H^{1,2}(\Omega)$ als Grundraum - dies entspricht natürlichen Randbedingungen - oder auch elliptische Operatoren höherer Ordnung formulieren.

Kapitel 3

Allgemeine lineare Funktionalanalysis

Im Verlauf dieses Kapitels sind sämtliche auftretenden Vektorräume reell.

3.1 Analytische Formulierung des Satzes von Hahn-Banach

Der Satz von Hahn-Banach befasst sich mit der Fortsetzung von linearen Funktionalen, welche auf einem linearen Teilraum definiert sind, auf den ganzen Vektorraum - dies unter Beibehaltung der Norm bzw. verwandter Größen.

1.1 Satz (Hahn-Banach, analytische Form). *Sei V ein Vektorraum und $p : V \to \mathbb{R}$ positiv homogen und subadditiv, d.h. $p(\lambda x) = \lambda p(x)$ für alle $x \in V$ und $\lambda \in \mathbb{R},\ \lambda > 0$, und $p(x + y) \leq p(x) + p(y)$ für alle $x, y \in V$. Ferner sei W ein linearer Teilraum von V und $\varphi : W \to \mathbb{R}$ ein lineares Funktional mit*

$$\varphi(x) \leq p(x) \qquad \text{für alle } x \in W.$$

Dann gibt es ein lineares Funktional $f : V \to \mathbb{R}$, das ein Fortsetzung von φ ist, d.h. $f|_W = \varphi$, und

$$f(x) \leq p(x) \qquad \text{für alle } x \in V$$

erfüllt.

• Besonders wichtig ist der Fall, dass $p(x) = \|x\|$, wenn V ein normierter Vektorraum mit Norm $\|\cdot\|$ ist.
• Mit der gleichen Beweisstrategie kann man zeigen, dass die Aussagen von Satz 1.1 analog gelten, wenn man die positiv homogene, subadditive Funktion p durch eine konvexe Funktion ersetzt.

Zum Beweis von Satz 1.1 zeigen wir zunächst, dass das Funktional φ in Satz 1.1 auf einen größeren Raum $W \oplus \langle x_0 \rangle$ unter Erhaltung der Ungleichung $\varphi(x) \le p(x)$ fortgesetzt werden kann.

1.2 Lemma (Elementarerweiterung). *Unter den Voraussetzungen von Satz 1.1 gibt es zu jedem* $x_0 \in V \setminus W$ *eine lineare Fortsetzung* $f_1 : W \oplus \langle x_0 \rangle \to \mathbb{R}$ *von* $\varphi : W \to \mathbb{R}$, *so dass*

$$f_1(y) \le p(y) \qquad \text{für alle } y \in W \oplus \langle x_0 \rangle \,. \tag{1.3}$$

Beweis : Wir setzen

$$f_1(x + tx_0) = \varphi(x) + t\alpha \,,$$

wobei α noch definiert werden muss. Jedenfalls ist f_1 linear auf $W \oplus \langle x_0 \rangle$. Um ein geeignetes α zu finden, welches die Ungleichung (1.3) erfüllt, beachten wir, dass wegen der positiven Homogenität von p nur sichergestellt werden muss, dass für alle $x \in W$

$$\begin{aligned} \varphi(x) + \alpha &\le p(x + x_0) \,, \\ \varphi(x) - \alpha &\le p(x - x_0) \end{aligned} \tag{1.4}$$

gilt. Ersetzt man in (1.4) x durch x/t, $t > 0$, und multipliziert mit t, so ergibt sich (1.3) für $y = x \pm tx_0$. Aufgrund der Eigenschaften von φ und p gilt für alle $\xi, x \in W$

$$\varphi(x) + \varphi(\xi) = \varphi(x + \xi) \le p(x + \xi) \le p(x + x_0) + p(\xi - x_0) \,,$$

woraus

$$\varphi(\xi) - p(\xi - x_0) \le p(x + x_0) - \varphi(x) \,,$$

folgt. Dies impliziert sofort

$$\sup_{\xi \in W} \{\varphi(\xi) - p(\xi - x_0)\} \le \alpha \le \inf_{x \in W} \{p(x + x_0) - \varphi(x)\}$$

was äquivalent zu (1.4) ist. ∎

Beweis (Satz 1.1): Wir geben den Beweis nur für den besonders einfachen Fall eines separablen, normierten Vektorraums V und $p(x) = K\|x\|$ an. Der Beweis des allgemeinen Falles geschieht mit Hilfe des *Lemmas von Zorn.*
Es sei $\{x_j |\ j \in \mathbb{N}\}$ eine Menge von linear unabhängigen Vektoren aus V, deren lineare Hülle in V dicht ist. Sei $\{x_j |\ j \in \Lambda \subset \mathbb{N}\}$ die Teilmenge von Vektoren x_j, die nicht in $\overline{W}$ liegen. Durch sukzessive Anwendung der Elementarerweiterung mit $x_0 = x_j$, $j \in \Lambda$, erhalten wir eine Fortsetzung f_1 von φ auf $W \oplus \langle x_j \,\big|\, j \in \Lambda \rangle$ unter Beibehaltung der Ungleichung

$$f_1(x) \le K\|x\|.$$

Durch Abschluss erhalten wir eine Fortsetzung auf den ganzen Raum V, d.h. wir definieren

$$f(y) := \lim_{y_k \to y} f_1(y_k)\,, \qquad y_k \in W \oplus \langle x_j \,\big|\, j \in \Lambda \rangle\,.$$

Aufgrund der Linearität von f_1 sehen wir, dass $(f_1(y_k))_{k\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge ist und somit der Grenzwert existiert. Diese Definition zusammen mit obiger Ungleichung liefert für alle $y \in V$

$$f(y) \leq K\|y\|.$$

■

Der Beweis des allgemeinen Satzes von Hahn-Banach geschieht mit Hilfe des *Lemmas von Zorn*. Zur Formulierung dieses Lemmas benötigen wir einige Begriffe: Es sei M eine Menge mit einer **Halbordnung** $\prec$, d.h. für gewisse Paare $(a, b) \in M \times M$ ist

$$a \prec b \qquad \text{oder} \qquad b \prec a\,.$$

Wenn einer der beiden Fälle zutrifft, sagt man *„a und b sind vergleichbar"*. Es gelten die Regeln

(i) $a \prec a$,

(ii) $\{a \prec b \text{ und } b \prec a\} \Rightarrow a = b$,

(iii) $\{a \prec b \text{ und } b \prec c\} \Rightarrow a \prec c$.

Beispiel: *(i)* $M = \mathbb{R}^n$ mit der Halbordnung $\leq$, die definiert ist durch

$$a \leq b \Leftrightarrow a_i \leq b_i \qquad \text{für die Komponenten } a_i \text{ und } b_i\,,\ i = 1, \ldots, n\,.$$

(ii) Die Menge der linearen Teilräume eines Vektorraumes bildet eine Halbordnung bezüglich der mengentheoretischen Inklusion.

Eine **Kette** Q ist eine Teilmenge einer Menge M mit Halbordnung, welche **total geordnet** ist, d.h. für je zwei Elemente $a, b \in Q$ gilt $a \prec b$ oder $b \prec a$.

Beispiel: Jede eindimensionale Strecke im $\mathbb{R}^n$ mit einem Richtungsvektor der nur nichtnegative Komponenten hat ist bzgl. der Halbordnung $\leq$ eine Kette.

Eine **obere Schranke** für eine Teilmenge S einer Menge M mit Halbordnung $\prec$ ist ein Element a mit

$$s \prec a \qquad \text{für alle } s \in S\,.$$

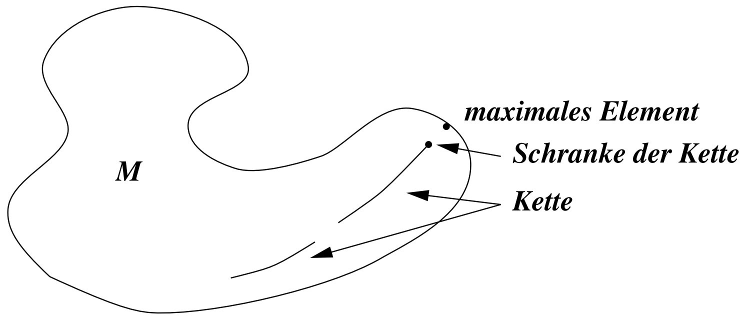
Ein Element $m \in M$ heißt **maximal** (auf M), wenn es von keinem anderen Element $x \in M$ bezüglich $\prec$ übertroffen werden kann, d.h. aus

$$m \prec x \qquad \text{folgt } x = m\,.$$

(Es ist aber durchaus möglich, dass m maximal ist und mit dem Element x nicht vergleichbar ist.)

Lemma (Zorn). *Sei M eine nichtleere Menge mit Halbordnung. Jede Kette aus M besitze eine obere Schranke. Dann besitzt M ein maximales Element.*

Beispiel: Sei $M \subset \mathbb{R}^2$ beschränkt und abgeschlossen und mit der Halbordnung $\leq$ aus Beispiel (i) versehen. Man überlegt sich - etwa mit Hilfe komponentenweiser Supremumsbildung - dass jede Kette eine obere Schranke besitzt. Es muss daher ein maximales Element in M geben. M braucht durchaus nicht „konvex“ sein.



Das Lemma von Zorn wird aus dem sogenannten *Auswahlaxiom* der Mengenlehre hergeleitet: *Ist $\mathcal{F}$ eine Familie von nichtleeren Mengen, so gibt es eine Funktion, die jeder Menge M aus $\mathcal{F}$ ein Element $m \in M$ zuordnet.*

Dies erscheint evident, aber die Aussage ist äquivalent zum sogenannten *Wohlordnungssatz*, der zumindest einem Analytiker Unwohlsein erzeugt, wie sogleich erläutert wird.

Der Wohlordnungssatz besagt, dass jede Menge M wohlgeordnet werden kann, d.h. es gibt eine Ordnungsrelation $\prec$ in M, die die Axiome der *Halbordnung* erfüllt, so dass je zwei Elemente $a, b \in M$ *vergleichbar* sind (d.h. es gilt $a \prec b$ oder $b \prec a$) und zusätzlich die Eigenschaft besitzt, dass jede nichtleere Teilmenge von M ein kleinstes Element bezüglich der Ordnung $\prec$ besitzt. Die letztere Eigenschaft bedeutet, dass die übliche Ordnung in $\mathbb{R}$, welche durch das $\leq$-Symbol gegeben ist, *keine* Wohlordnung ist, denn offene Intervalle in $\mathbb{R}$ besitzen *kein* kleinstes Element. In der Tat hat bisher noch niemand eine Wohlordnung der reellen Zahlen konkret konstruiert - man weiss nur, dass sie existiert und aus dem Auswahlaxiom folgt.

Nimmt man den Wohlordnungssatz als gegeben an, ist der Beweis des Zornschen Lemmas „einfach“. Wir geben ihn an, weil in ihm das Prinzip der *transfiniten Induktion* verwendet wird, welches man aus „erkenntnis-theoretischen“ Gründen einmal gesehen haben sollte.

Beweis (Lemmas von Zorn mit Hilfe des Wohlordnungssatzes): Es sei M die im Lemma von Zorn genannte halbgeordnete Menge und $x_\alpha,\ \alpha \in I$, eine Wohlordnung der Elemente $x_\alpha \in M$, d.h. I ist eine wohlgeordnete Indexmenge bezüglich einer Ordnungsrelation, die wir mit dem Symbol $\leq$ bezeichnen und zu jedem $\alpha \in I$ gehört genau ein $x_\alpha \in M$. Wir bestimmen durch transfinite Induktion eine spezielle *Kette G* in M.

(i) Sei α_0 der kleinste Index aus I. Dann gehöre x_{α_0} zu G.

(ii) Ist für $\beta < \gamma$, $\beta, \gamma \in I$, entschieden, welche x_β zu G gehören, so gehöre x_γ genau dann zu G, wenn $x_\beta \prec x_\gamma$ für alle $x_\beta \in G$, $\beta < \gamma$.

Nach Konstruktion ist G eine Kette. Nach der Voraussetzung im Lemma von Zorn hat G eine obere Schranke z. Da z eines der x_α ist, muss z in G liegen, ist also das größte Element von G und maximal in M. (Wenn es nicht maximal wäre, gäbe es ein $x'_\alpha \succ z$, welches aber dann aufgrund der Konstruktion von G in G liegen müsste, z könnte dann nur obere Schranke sein, wenn $x'_\alpha = z$.) ■

Der Kürze halber haben wir hier die Indexmenge I nicht konkretisiert und verweisen auf Bücher aus der Mengenlehre (Kamke).
Nach diesen Vorbereitungen beweisen wir den Satz von Hahn-Banach für Vektorräume in voller Allgemeinheit.

Beweis (Satz 1.1): Wir betrachten die Menge

$$M = \big\{ h : D(h) \longrightarrow \mathbb{R} \,\big|\, D(h) \text{ linearer Teilraum von } V,\ W \subset D(h), \\ h \text{ linear},\ h|_W = \varphi,\ h(x) \le p(x)\ \forall x \in D(h) \big\}\,.$$

In M besteht die Halbordnung $\prec$, welche erklärt ist durch

$$h_1 \prec h_2 \Leftrightarrow D(h_1) \subset D(h_2) \text{ und } h_2 \text{ ist Fortsetzung von } h_1\,.$$

Da $\varphi \in M$, ist $M \neq \emptyset$. Ferner erfüllt $(M, \prec)$ die Voraussetzung des Lemmas von Zorn. Ist nämlich K eine Kette in M, $K = \{h_i \in M \,\big|\, i \in I\}$, so definiert man

$$D(h) = \bigcup_{i \in I} D(h_i) \text{ und } h(x) = h_i(x)\,, \quad x \in D(h_i)\,.$$

Das so konstruierte Element $h \in M$ ist dann eine obere Schranke von K. Nach dem Lemma von Zorn gibt es daher ein maximales Element $f \in M$ bezüglich $\prec$. Wir behaupten, dass $D(f) = V$, was den Beweis dann vollenden würde. Angenommen, es wäre $D(f) \neq V$. Dann gibt es ein $x_0 \in V$, $x_0 \notin D(f)$ und wir führen eine Elementarerweiterung von f nach Lemma 1.2 durch. f wäre dann nicht maximal. ■

Wir geben sofort einige Folgerungen aus dem Satz von Hahn–Banach an. Dazu erinnern wir an die Definition $\|f\|_{V^*} = \sup\limits_{\substack{\|u\|_V \le 1 \\ u \in V}} |\langle f, u \rangle|$

1.5 Lemma. *Sei V ein normierter Raum und $W \subset V$ ein linearer Teilraum. Jedes lineare, stetige Funktional $\varphi \in W^*$ lässt sich zu einem linearen, stetigen Funktional $f \in V^*$ fortsetzen, so dass*

$$\|f\|_{V^*} = \|\varphi\|_{W^*}\,.$$

Beweis : Man wendet Satz 1.1 mit $p(x) = \|\varphi\|_{W^*} \|x\|$ an und erhält sofort die Existenz einer Fortsetzung $f \in V^*$ von φ mit $\|f\|_{V^*} \le \|\varphi\|_{W^*}$. Die Definition der Norm im Dualraum und die Eigenschaften des Supremums liefern sofort $\|\varphi\|_{W^*} \le \|f\|_{V^*}$. ∎

1.6 Lemma. *Sei V ein normierter Vektorraum. Zu jedem $u \in V$ existiert ein $f \in V^*$ mit $\|f\|_{V^*} = \|u\|_V$ und $\langle f, u\rangle = \|u\|_V^2$.*

Beweis : Man wendet Lemma 1.5 mit $W = \langle u\rangle$ und $\varphi(tu) = t\,\|u\|^2$ an. Es gilt dann

$$\|\varphi\|_{W^*} = \sup\left\{\, |t|\ \|u\|^2 \,\Big|\, |t|\|u\| \le 1\right\} = \|u\|\,.$$

Also liefert Lemma 1.5 eine Fortsetzung $f \in V^*$ von φ mit $\|f\|_{V^*} = \|u\|$. Da $f|_W = \varphi$ gilt

$$\langle f, u\rangle = \|u\|^2.$$
∎

1.7 Lemma. *Sei V normierter Vektorraum und $u \in V$. Aus $\langle f, u\rangle = 0$ für alle $f \in V^*$ folgt $u = 0$.*

Beweis : Man wähle das in Lemma 1.6 konstruierte f und erhält $0 = \langle f, u\rangle = \|u\|^2$. ∎

• Das Element f in Lemma 1.6 muss nicht eindeutig sein. Dies gilt nur, wenn die Norm in V^* **strikt konvex** ist, d.h. für jedes Paar $f_1 \ne f_2 \in V^*$, $\|f_1\| = \|f_2\| = 1$ gilt

$$\|t f_1 + (1-t)\, f_2\| < 1\,, \qquad 0 < t < 1\,.$$

Die Abbildung, die jedem $u \in V$ die Menge der Elemente f zuordnet, so dass die Aussagen von Lemma 1.6 gelten, nennt man die **Dualitätsabbildung**. Nach Definition von $\|f\|_{V^*}$, $f \in V^*$, gilt

$$\|f\|_{V^*} := \sup\left\{\, |\langle f, u\rangle| \,\Big|\, \|u\| \le 1, u \in V\right\}, \tag{1.8}$$

nach Lemma 1.6 hingegen gilt

$$\|u\| = \max\{|\langle f, u\rangle| \,\big|\, \|f\|_{V^*} \le 1\,, f \in V^*\}\,, \tag{1.9}$$

denn es gibt ein $f_0 \in V^*$ mit $\|f_0\|_{V^*} = \|u\|\,,\ \langle f_0, u\rangle = \|u\|^2$. Das Element $\|u\|^{-1} f_0$ realisiert das Maximum in (1.9). Man nennt (1.9) oft **Normformel**. Man kann beweisen, dass auch das „sup“ in (1.8) genau dann angenommen wird, wenn der Raum reflexiv ist.

3.2 Geometrische Formulierung des Satzes von Hahn-Banach

Man kann den Satz von Hahn-Banach auch als Satz über die Trennung konvexer Mengen durch Hyperebenen formulieren. Dazu benötigen wir einige Begriffe. Wie im endlich-dimensionalen Fall definiert man Hyperebenen.

2.1 Definition. *Eine* ***Hyperebene*** *in einem Vektorraum V ist eine Menge der Gestalt*

$$H = \{x \in V |\, \varphi(x) = \alpha\} =: \{\varphi = \alpha\}$$

mit einer linearen Abbildung $\varphi : V \to \mathbb{R}$, $\varphi \neq 0$, und einer Zahl $\alpha \in \mathbb{R}$.

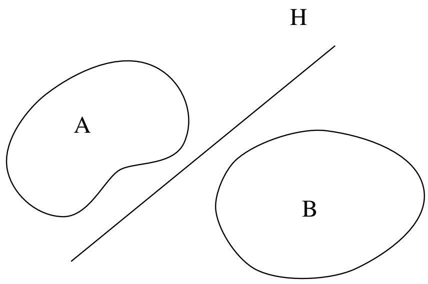
2.2 Lemma. *Sei V ein normierter Vektorraum. Eine Hyperebene $\{\varphi = \alpha\}$ ist genau dann abgeschlossen, wenn φ stetig ist.*

Beweis : Wenn φ stetig ist, ist $\{\varphi = \alpha\}$ offenbar abgeschlossen. Sei also $\{\varphi = \alpha\}$ abgeschlossen und sei φ nicht stetig. Somit existiert eine Nullfolge (x_n) mit $\varphi(x_n) \not\to 0$. Für ein geeignetes $c_0 > 0$ existiert eine Teilfolge, die wir wieder mit (x_n) bezeichnen, mit $|\varphi(x_n)| \geq c_0$. Wir reskalieren die Folge (x_n), d.h. wir setzen $\tilde{x}_n := \frac{x_n}{\varphi(x_n)}$ und sehen, dass $(\tilde{x}_n)$ eine Nullfolge ist mit $\varphi(\tilde{x}_n) = 1$. Sei nun $y_0 \in V$ derart, dass $\varphi(y_0) = \beta \neq \alpha$. Die Folge $(\alpha - \beta)\tilde{x}_n + y_0$ konvergiert gegen y_0 und erfüllt $\varphi\big((\alpha - \beta)\tilde{x}_n + y_0\big) = \alpha$. Da $\{\varphi = \alpha\}$ abgeschlossen ist, folgt $\varphi(y_0) = \alpha$, ein Widerspruch. ■

2.3 Definition. *Seien A, B Teilmengen eines normierten Vektorraumes V. Man sagt, „die Hyperebene $\{\varphi = \alpha\}$* ***trenne*** *A und B“, wenn*

$$\varphi(x) \leq \alpha \leq \varphi(y) \quad \text{für alle } x \in A \text{ und } y \in B\,. \tag{2.4}$$

• Auf die Reihenfolge von A und B kommt es nicht an, d.h. (2.4) bedeutet auch, dass $\{\varphi = \alpha\}$ die Mengen B und A trennt.



Man spricht von **strikter Trennung**, wenn ein $\varepsilon > 0$ existiert mit

$$\varphi(x) + \varepsilon \leq \alpha \leq \varphi(y) - \varepsilon\,, \qquad x \in A,\ y \in B\,.$$

2.5 Satz (Hahn-Banach, geometrische Form). *Sei V ein normierter Raum und A, B zwei nichtleere, disjunkte, konvexe Teilmengen von V. Die Menge A sei offen. Dann gibt es eine abgeschlossene A und B trennende Hyperebene.*

Zum Beweis benötigen wir das **Minkowski-Funktional** $p_C \colon V \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ einer konvexen Menge $C \subset V,\ 0 \in C$

$$p_C(x) := \inf\{\alpha > 0 \,\big|\, \alpha^{-1}x \in C\}\,,$$

wobei $\inf \emptyset := \infty$. Man beachte, dass $p_C(x) = \infty$ nur möglich ist, wenn $0 \in \partial C$.

2.6 Lemma. *Sei C eine offene, konvexe Teilmenge des normierten Vektorraumes V. Es sei $0 \in C$. Dann gibt es einer Konstante $M > 0$, so dass für alle $x \in V$*

$$0 \le p_C(x) \le M\,\|x\|\,. \tag{2.7}$$

Ferner gilt

$$C = \{x \in V \,\big|\, p_C(x) < 1\} \tag{2.8}$$

und p_C ist positiv homogen und subadditiv.

Beweis : Sei $B_r(0) \subset C,\ r > 0$. Dann gilt $\frac{r-\varepsilon}{\|x\|}\,x \in C,\ x \in V$, und $p_C(x) \le \frac{\|x\|}{r}$ nach Definition von p_C. Daraus folgt (2.7). Die positive Homogenität von p_C folgt aus

$$\begin{aligned}
p_C(\lambda x) &= \inf\{\alpha > 0 \,\big|\, \alpha^{-1}\,\lambda x \in C\}\\
&= \inf\{\beta\lambda > 0 \,\big|\, \beta^{-1}x \in C\}\\
&= \lambda \inf\{\beta > 0 \,\big|\, \beta^{-1}x \in C\} = \lambda\, p_C(x)\,, \qquad \lambda > 0\,.
\end{aligned}$$

Wir beweisen nun (2.8). Ist $x \in C$, so gilt auch $(1+\varepsilon)\,x \in C$ für genügend kleines ε wegen der Offenheit von C. Daher $p_C(x) \le \frac{1}{1+\varepsilon} < 1$, d.h. $C \subset \{x \in V \,\big|\, p_C(x) < 1\}$. Ist umgekehrt $p_C(x) < 1$, dann folgt $\alpha^{-1}x \in C$ mit einem $\alpha \in (0,1)$ und somit $x = \alpha(\alpha^{-1}x) + (1-\alpha)\,0 \in C$. Es verbleibt der Nachweis der Subadditivität von p_C. Seien $x, y \in V,\ \varepsilon > 0$. Da

$$p_C\Big(\frac{x}{p_C(x)+\varepsilon}\Big) = \frac{1}{p_C(x)+\varepsilon}\,p_C(x) < 1\,,$$

folgt

$$\frac{x}{p_C(x)+\varepsilon} \in C \quad \text{und entsprechend } \frac{y}{p_C(y)+\varepsilon} \in C\,.$$

Aus Konvexitätsgründen ist

$$\frac{tx}{p_C(x)+\varepsilon} + \frac{(1-t)\,y}{p_C(y)+\varepsilon} \in C, \qquad 0 < t < 1\,.$$

Setzt man

$$t = \frac{p_C(x)+\varepsilon}{p_C(x)+p_C(y)+2\varepsilon}\,,$$

folgt

$$\frac{x+y}{p_C(x)+p_C(y)+2\varepsilon} \in C\,.$$

Dies zusammen mit (2.8) und der positiven Homogenität liefert

$$p_C(x+y) < p_C(x)+p_C(y)+2\varepsilon\,.$$

Grenzübergang $\varepsilon \to 0$ ergibt die Behauptung. ■

2.9 Lemma. *Sei V ein normierter Vektorraum und $C \subset V$ offen, konvex und nichtleer. Sei $x_0 \in V$, $x_0 \notin C$. Dann gibt es ein beschränktes, lineares Funktional $f \in V^*$, $f \neq 0$ mit*

$$f(x) < f(x_0) \qquad \textit{für alle } x \in C\,.$$

Beweis : Mithilfe einer Verschiebung können wir o.B.d.A. $0 \in C$ annehmen. Auf dem eindimensionalen Raum $\langle x_0 \rangle$ definieren wir das lineare Funktional φ durch

$$\varphi(tx_0) = t\,.$$

Für alle $x \in \langle x_0 \rangle$ gilt $\varphi(x) \leq p_C(x)$, da andernfalls für ein $y = tx_0 \in \langle x_0 \rangle$ gelten würde:

$$p_C(y) < \varphi(y)\,, \qquad \text{d.h. } 0 \leq p_C(tx_0) < t\,.$$

Somit ist $t > 0$ und die positive Homogenität von p_C liefert $p_C(x_0) < 1$. Dies würde nach Lemma 2.6 aber $x_0 \in C$ bedeuten, was ein Widerspruch wäre. Nach dem Satz von Hahn-Banach in der analytischen Form (Satz 1.1) lässt sich φ zu einem linearen Funktional $f : V \to \mathbb{R}$ fortsetzen mit

$$f(x) \leq p_C(x)\,.$$

Insbesondere ist $f(x_0) = \varphi(x_0) = 1$ und andererseits $f(x) \leq p_C(x) < 1$ für $x \in C$ wegen (2.8). Aus der letzten Ungleichung und (2.7) folgern wir $f \in V^*$, was den Beweis des Satzes beschließt. ■

Beweis (Satz 2.5): Die Menge $C = A \ominus B := \{a - b \mid a \in A,\ b \in B\}$ ist konvex. Wegen der Darstellung $C = \bigcup_{y \in B} (A - y)$ ist C offen. Da $A \cap B = \emptyset$, gilt $0 \notin C$. Wegen Lemma 2.9 gibt es $f \in V^*$ (d.h. ist f stetig und linear) mit

$$\begin{aligned} f(z) < f(0) = 0\,, &\qquad z \in C\,, \\ f(x) < f(y)\,, &\qquad x \in A,\ y \in B\,. \end{aligned} \tag{2.10}$$

Wir wählen α so, dass

$$\sup_{x \in A} f(x) \le \alpha \le \inf_{y \in B} f(y)\,.$$

Die Hyperebene $\{f = \alpha\}$ ist wegen Lemma 2.2 abgeschlossen und trennt A und B. ∎

Im Unendlichdimensionalen lassen sich beliebige konvexe Mengen nicht notwendig trennen.
Beispiel: $V = L^2(\Omega)$, Ω ein Gebiet des $\mathbb{R}^n$.

$$A = \{z \in C(\Omega) \cap L^2 \mid \|z\|_2 < 1\}\,, \qquad B = \{y_0\}$$

mit fester L^2-Funktion $y_0 \notin C(\Omega)$, $\|y_0\|_{L^2} = \frac{1}{2}$. Man beachte, dass das Innere von A bezüglich der L^2-Norm *leer* ist. Ferner gilt $A \cap B = \emptyset$. Wir behaupten, dass A und B *nicht* durch eine abgeschlossene Hyperebene getrennt werden können. Gäbe es ein $f \in (L^2(\Omega))^*$ für das

$$f(z) < f(y_0)\,, \qquad z \in C(\Omega) \cap L^2\,, \quad \|z\|_{L^2} < 1\,,$$

gilt, so folgt, da $C(\Omega) \cap \overline{B_1(0)}$ dicht in $\overline{B_1(0)} := \{w \in L^2 \mid \|w\|_{L^2} \le 1\}$ ist,

$$\begin{aligned} \|f\|_{(L^2(\Omega))^*} = \sup_{\|z\|_{L^2(\Omega)} \le 1} f(z) &= \sup_{z \in C(\Omega) \cap \overline{B_1(0)}} f(z) \\ &< f(y_0) \le \tfrac{1}{2} \|f\|_{(L^2(\Omega))^*}\,. \end{aligned}$$

Dies wäre ein Widerspruch.

Wir notieren eine Variante der geometrischen Form des Satzes von Hahn-Banach.

2.11 Satz. *Sei V ein normierter Vektorraum und $A, C \subset V$ konvexe, disjunkte nichtleere Teilmengen von V. Ferner sei A abgeschlossen und C kompakt. Dann gibt es eine abgeschlossene Hyperebene, die A und C strikt trennt.*

Beweis : Für $\varepsilon > 0$ setzen wir $A_\varepsilon = A + B_\varepsilon(0), C_\varepsilon = C + B_\varepsilon(0)$. Offensichtlich sind $A_\varepsilon, C_\varepsilon$ offen, konvex und nichtleer. Falls $\varepsilon > 0$ klein genug gewählt wurde gilt auch $A_\varepsilon \cap C_\varepsilon = \emptyset$. Falls dies nicht gelten würde, gäbe es $\varepsilon_n \searrow 0, x_n \in A, y_n \in C$, $\|x_n - y_n\| \le 2\varepsilon_n$. Da C kompakt ist gibt es eine Teilfolge $y_{n_k} \to y \in C$, $k \to \infty$. Dies ist aber ein Widerspruch.
Satz 2.5 liefert die Existenz einer A_ε und C_ε trennenden, abgeschlossenen Hyperebene, d.h. es gibt ein $f \in V^*$ und $\alpha \in \mathbb{R}$ mit

$$f\Big(x + \frac{\varepsilon}{2} z_1\Big) \le \alpha \le f\Big(y + \frac{\varepsilon}{2} z_2\Big), \qquad \forall x \in A, y \in C, z_1, z_2 \in \overline{B_1(0)}\,.$$

Somit gilt, da sowohl z_i als auch $-z_i$, $i = 1, 2$, gewählt werden können

$$f(x) + \frac{\varepsilon}{2} \|f\|_{V^*} \le \alpha \le f(y) - \frac{\varepsilon}{2} \|f\|_{V^*}\,, \qquad \forall x \in A, y \in C\,,$$

d.h. A und C sind strikt getrennt. ∎

2.12 Folgerung. *Sei V ein normierter Vektorraum und W ein linearer Teilraum mit $\overline{W} \neq V$. Dann existiert ein $f \in V^*$, $f \neq 0$, so dass für alle $x \in W$ gilt:*

$$\langle f, x \rangle = 0$$

Beweis : Sei $x_0 \in V \setminus \overline{W}$. Dann folgt mit Satz 2.11 für $A = \overline{W}$ und $C = \{x_0\}$, dass es ein $f \in V^*$, $f \neq 0$, und $\alpha \in \mathbb{R}$ gibt, mit

$$\langle f, x \rangle < \alpha < \langle f, x_0 \rangle \qquad \forall\, x \in \overline{W}\,.$$

Für $x \in W$ ist $\lambda x \in W$ für alle $\lambda \in \mathbb{R}$, und somit

$$\left.\begin{aligned} \lambda \to \infty \Rightarrow \langle f, x \rangle \le 0 \\ \lambda \to -\infty \Rightarrow \langle f, x \rangle \ge 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \langle f, x \rangle = 0\ \forall\, x \in \overline{W}\,.$$

∎

• Die analytische Form des Satzes von Hahn-Banach lässt sich mit Hilfe der geometrischen Form beweisen - siehe Köthe, Topologische lineare Räume, Kap. 17.2. Der Satz ist dort noch erheblich allgemeiner dargestellt.

3.3 Prinzip der gleichmäßigen Beschränktheit

3.1 Satz (Banach-Steinhaus). *Sei X ein Banachraum und Y ein normierter Vektorraum. Sei $(A_i)_{i \in I}$ eine Familie beschränkter, linearer Operatoren von X nach Y, die punktweise beschränkt sind, d.h. für alle $x \in X$ gilt:*

$$\sup_{i \in I} \|A_i x\|_Y < \infty. \tag{3.2}$$

Dann sind die Operatornormen der A_i gleichmäßig beschränkt, d.h.

$$\sup_{i\in I} \|A_i\|_{L(X,Y)} < \infty. \tag{3.3}$$

• Die Linearität ist eine wichtige Voraussetzung , denn betrachte $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f_n(x) = \begin{cases} |x|^2 & \text{für } |x| \leq n \\ n^2 & \text{für } |x| \geq n \end{cases}$$

Für $x \in \mathbb{R}$ ist $\sup\limits_n f_n(x) \leq K(x) < \infty$ und für $|x| < K$ ist $\sup_n |f_n(x)| \leq K^2$, also ist $\sup\limits_{x\in\mathbb{R}} \frac{|f_n(x)|}{|x|} = n$, aber $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} n = \infty$. Die Folge f_n ist also punktweise, aber nicht gleichmäßig beschränkt.

3.4 Satz (Baire). *Sei (X, d) ein nichtleerer, vollständiger metrischer Raum und seien $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ abgeschlossene Mengen mit*

$$\bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k = X.$$

Dann gibt es ein $k_0 \in \mathbb{N}$ mit $\operatorname{int} A_{k_0} \neq \emptyset$.

Beweis : Wir machen einen Widerspruchsbeweis und nehmen an, dass für alle $k \in \mathbb{N}$ $\operatorname{int} A_k = \emptyset$. Für alle offenen, nichtleeren Mengen U und für alle $k \in \mathbb{N}$ ist $U \setminus A_k$ offen, denn $U \setminus A_k = \underbrace{U}_{\text{offen}} \cap \underbrace{(X \setminus A_k)}_{\text{offen}}$, und nichtleer, denn sonst wäre $U \subseteq A_k \Rightarrow \operatorname{int} U \subseteq \operatorname{int} A_k = \emptyset \Rightarrow U = \emptyset$, ein Widerspruch.
Also gibt es ein $\varepsilon > 0$ und ein x, so dass $\overline{B_\varepsilon(x)} \subseteq U \setminus A_k$ für $\varepsilon < \frac{1}{k}$. Induktiv konstruieren wir also Mengen

$$\overline{B_{\varepsilon_k}(x_k)} \subseteq B_{\varepsilon_{k-1}}(x_{k-1}) \setminus A_k \qquad \varepsilon_k < \frac{1}{k}.$$

Für alle $l \geq k$ ist $x_l \in B_{\varepsilon_k}(x_k)$, also ist (x_k) ist Cauchyfolge, denn für $n, l \geq k$ gilt:

$$d(x_n, x_l) \leq d(x_n, x_k) + d(x_k, x_l) < \frac{2}{k}$$

Da X vollständig ist, gibt es ein $x \in X$, gegen das die Folge (x_k) konvergiert. Für alle $l \geq k$ ist $x_l \in B_{\varepsilon_k}(x_k) \Rightarrow x \in \overline{B_{\varepsilon_k}(x_k)}\ \forall\ k \in \mathbb{N}$. Nach Konstruktion ist $\overline{B_{\varepsilon_k}(x_k)} \subseteq B_{\varepsilon_{k-1}}(x_{k-1}) \setminus A_k$, also ist $A_k \cap \overline{B_{\varepsilon_k}(x_k)} = \emptyset$. Da aber $x \in B_{\varepsilon_k}(x_k)$ ist $\forall\ k \in \mathbb{N}\ x \notin A_k$. Aber $x \in X = \bigcup A_k$, ein Widerspruch. ■

Beweis (Satz 3.1): Wir betrachten Mengen der Form

$$F_n := \{x \in X \,\big|\, \forall\ i \in I\ \|A_i x\| \leq n\}.$$

Da A_i stetig ist, sind die F_n abgeschlossen und $\bigcup F_n = X$. Nach dem Satz von Baire (Satz 3.4) gibt es dann einen Index n_0, für den das Innere von F_{n_0} nicht leer ist. Also gibt es einen Punkt $x_0 \in F_{n_0}$ und einen Radius $r > 0$, so dass

$$\overline{B_r(x_0)} \subseteq \operatorname{int} F_{n_0}.$$

Also gilt für alle $z \in \overline{B_1(0)}$ und für alle $i \in I$

$$\|A_i(x_0 + rz)\| \le n_0\,,$$

woraus $r\|A_i z\| \le \|A_i(x_0 + rz)\| + \|A_i x_0\| \le n_0 + \|A_i x_0\|$ folgt. Wir erhalten demzufolge für alle $z \in \overline{B_1(0)}$ und für alle $i \in I$

$$\|A_i z\| \le \frac{n_0 + \|A_i x_0\|}{r}\,,$$

d.h. $|||A_i||| = \sup\limits_{\|z\| \le 1} \|A_i z\| \le c(r, x_0, n_0)$. Also können wir auch das Supremum über alle $i \in I$ bilden und erhalten die Behauptung des Satzes 3.1. ■

• Ungleichung (3.3) kann auch wie folgt formuliert werden: Es existiert ein $K > 0$, so dass für alle $i \in I$ und alle $x \in X$ gilt:

$$\|A_i x\| \le K\|x\| \tag{3.5}$$

3.6 Folgerung. *Seien X, Y Banachräume und seien $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ lineare, beschränkte Operatoren von X nach Y, so dass für alle $x \in X$ die Folge $(A_n x)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert. Definiere $A\colon X \to Y : x \mapsto \lim_{n\to\infty} A_n x$. Dann gilt:*

(i) $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} \|A_n\|_{L(X,Y)} < \infty$

(ii) $A \in L(X, Y)$

(iii) $\|A\|_{L(X,Y)} \le \liminf\limits_{n\to\infty} \|A_n\|_{L(X,Y)}$

Beweis : Wir definieren $A\colon X \to Y$ durch $Ax := \lim_{n\to\infty} A_n x$.

(i) Für alle $x \in X$ konvergiert nach Voraussetzung die Folge $(A_n x)_n$ gegen Ax, also ist die Folge $(A_n x)$ beschränkt, d.h. für alle $x \in X$ gilt:

$$\|A_n x\| \le K(x)\,.$$

Dann folgt mit Satz 3.1 (Banach-Steinhaus), dass die Folge $(|||A_n|||)$ gleichmäßig beschränkt ist, d.h. $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} |||A_n||| < \infty$

(ii) Für alle $x \in X$ und für alle $n \in \mathbb{N}$ ist $\|A_n x\| \le K\|x\|$. Dies und die Definition von A liefert $\|Ax\| \le K\|x\|$. Also ist A beschränkt. Der Operator A ist linear da alle A_n linear sind.

(iii) Für alle $x \in \overline{B_1(0)}$ gilt $\|A_n x\| \le \|A_n\| \|x\| \le \|A_n\|$. Dies impliziert

$$\|Ax\| = \lim_{n\to\infty} \|A_n x\| \le \liminf_{n\to\infty} \|A_n\|$$

und demzufolge

$$\|A\| = \sup_{\|x\|\le 1} \|Ax\| \le \liminf_{n\to\infty} \|A_n\| \,.$$

∎

3.7 Folgerung. *Sei X ein Banachraum und $M \subseteq X$ eine Teilmenge. Falls für alle $f \in X^*$ die Menge*

$$f(M) = \bigcup_{x\in M} \langle f, x\rangle \tag{3.8}$$

in $\mathbb{R}$ beschränkt ist, dann ist auch M beschränkt.

• Eine Menge $M \subset X$, die (3.8) erfüllt, nennt man **schwach beschränkt**. Folgerung 3.7 besagt also, dass schwach beschränkte Mengen „stark“ beschränkt sind.
• Für $X = \mathbb{R}^n$ gilt $(\mathbb{R}^n)^* \simeq \mathbb{R}^n$. Sei (f_k) die duale Basis von $(\mathbb{R}^n)^*$ zur Basis (e_j) von $\mathbb{R}^n$, d.h. $\langle f_k, e_j\rangle = \delta_{kj}$. Falls für alle $x \in M$ und alle $k = 1, \ldots, n$ gilt $|\langle f_k, x\rangle| = \big|\sum_{i=1}^n x_i \langle f_k, e_i\rangle\big| = |x_k| \le c_k$, d.h. die k-te Komponente der $x \in M$ ist beschränkt, dann liefert Folgerung 3.7 die Beschränktheit der Menge M.

Beweis : Wende Satz 3.1 an mit $X = X^*$, $Y = \mathbb{R}$, $I = M$. Für alle $x \in M$ setzen wir $A_x(f) := \langle f, x\rangle$. Für alle $x \in X$ ist A_x eine lineare, beschränkte Abbildung von X^* nach $\mathbb{R}$. Nach Voraussetzung ist für alle $f \in X^*$ die Menge $\bigcup_{x\in M}\langle f, x\rangle = \bigcup_{x\in M} A_x(f)$ beschränkt, d.h. $\sup\limits_{x\in M} |A_x(f)| < \infty$. Wir haben also gezeigt, dass die Abbildungen $(A_x)_{x\in M}$ punktweise beschränkt sind. Satz 3.1 liefert also die Existenz eines $K > 0$, so dass für alle $f \in X^*$ und für alle $x \in M$ gilt:

$$|\langle f, x\rangle| \le K \|f\|_{X^*}$$

Daraus folgern wir mithilfe der Normformel (1.9), dass für alle $x \in M$ gilt:

$$\|x\| \le K \,,$$

d.h. die Menge M ist beschränkt. ∎

Analog beweist man:

3.9 Folgerung. *Sei X ein Banachraum und sei $M^* \subseteq X^*$ eine Teilmenge. Falls für alle $x \in X$ die Menge*

$$\langle M^*, x\rangle := \bigcup_{f\in M^*} \langle f, x\rangle$$

in $\mathbb{R}$ beschränkt ist, dann ist auch M^* in X^* beschränkt.

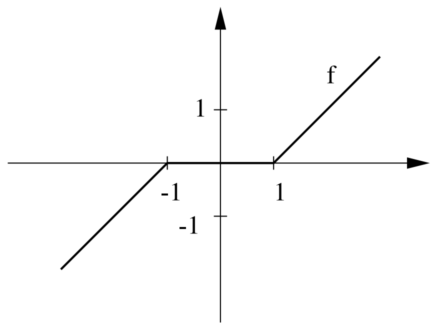
Ebenfalls eine Folge des Baireschen Kategoriensatzes ist der Satz von der offenen Abbildung.

3.10 Definition. *Eine Abbildung eines topologischen Raumes in einen anderen heißt* ***offen****, wenn sie offene Mengen in offene Mengen überführt.*

3.11 Satz (von der offenen Abbildung). *Jede stetige, lineare, surjektive Abbildung $A : X \to Y$ eines Banachraumes X in einen Banachraum Y ist offen.*

• Betrachten wir den Fall $X = Y = \mathbb{R}^n$ mit der üblichen Topologie. Stetige, surjektive nichtlineare Abbildungen sind selbst hier nicht offen. Beispiel für $n = 1$:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{für } |x| \leq 1, \\ x-1, & \text{für } x > 1, \\ x+1, & \text{für } x < -1. \end{cases}$$



Offensichtlich ist $f\big(B_\varepsilon(1)\big)$ nicht offen.

Der Fall $X = Y = \mathbb{R}^n$ mit einer linearen, surjektiven Abbildung A ist elementar. Wenn A surjektiv ist, gilt $\det A > 0$ und A^{-1} existiert auf $\mathbb{R}^n$. Da A^{-1} stetig, sind Urbilder offener Mengen offen, d.h. A ist offen.

Beweis (Satz 3.11): (i) Wir zeigen, dass eine Konstante $c > 0$ existiert mit

$$B_{4c} \subset \overline{AB_1} \tag{3.12}$$

Hierbei ist $B_r = B_r(0)$ und AB_1 das Bild von B_1 unter der Abbildung A, der Querstrich bedeutet den Abschluss der Menge.
Um (3.12) zu beweisen, setzen wir $F_n = n\overline{AB_1}$. Da A surjektiv ist, gilt $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} F_n = Y$, und nach dem Satz von Baire (Satz 3.4) muss eines

der F_n eine Kugel enthalten, d.h. $\operatorname{int} F_{n_0} \neq \emptyset$. Daraus folgt, dass auch $\operatorname{int} F_1 = \operatorname{int} \overline{AB_1} \neq \emptyset$, d.h. $\exists c > 0$ und $y_0 \in F_1$ mit

$$B_{8c}(y_0) \subset \overline{AB_1}\,.$$

Insbesondere ist $y_0 \in \overline{AB_1}$ und auf Grund der Linearität von A auch $-y_0 \in \overline{AB_1}$. Dies und die Linearität von A liefern

$$B_{8c}(0) = -y_0 + B_{8c}(y_0) \subset \overline{AB_1} + \overline{AB_1} \subset 2\overline{AB_1}\,.$$

Daraus ergibt sich (3.12).

(ii) Wir zeigen, dass mit obigem c

$$B_c \subset AB_1\,. \tag{3.13}$$

Um (3.13) zu beweisen, müssen wir zu $y \in B_c$ ein $x \in B_1$ mit $Ax = y$ finden. Wegen (3.12) existiert zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $z \in X$ mit $\|z\| < \frac{1}{4}$ und $\|y - Az\| < \varepsilon$, denn

$$y \in B_c \subset \overline{AB_{1/4}}\,.$$

Wählt man $\varepsilon = \frac{c}{4}$, hat man ein $z_1 \in X$ mit

$$\|z_1\| < \frac{1}{4} \quad \text{und} \quad \|y - Az_1\| < \frac{c}{4}\,.$$

Wir wiederholen das Spielchen mit $y - Az_1$ anstelle von y und wählen nun $\varepsilon = \frac{c}{16}$. Da $y - Az_1 \in B_{c/4} \subset \overline{AB_{1/16}}$, finden wir ein z_2 mit

$$\|z_2\| < \frac{1}{16} \quad \text{und} \quad \|(y - Az_1) - Az_2\| < \frac{c}{16}\,.$$

Dieses Argument wird wiederholt, und wir erhalten eine Folge (z_n) mit

$$\|z_n\| < \frac{1}{4^n} \quad \text{und} \quad \|y - A(z_1 + z_2 + \ldots + z_n)\| < \frac{c}{4^n}\,.$$

Die Elemente $x_n = z_1 + z_2 + \ldots + z_n$ bilden daher eine Cauchyfolge mit Limes x. Es gilt $\|x_n\| < \sum\limits_{j=1}^{\infty} \frac{1}{4^j}$ und somit

$$\|x\| \leq \sum_{j=1}^{\infty} \|z_j\| < \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{4^j} < 1\,.$$

Ferner gilt $\|y - Ax_n\| \to 0$, und schließlich $y - Ax = 0$. Das gewünschte x mit $\|x\| < 1$ ist damit konstruiert.

(iii) Sei $U \subseteq X$ offen und sei $y \in AU$. Dann gibt es ein $x_0 \in U$ mit $y = Ax_0$. Da U offen ist gibt es ein $\varepsilon > 0$ mit $B_\varepsilon(x_0) \subseteq U$ und also gilt

$$AB_\varepsilon(x_0) \subseteq AU\,.$$

Aber $AB_\varepsilon(x_0) = Ax_0 + \varepsilon AB_1$, was mit Hilfe von (3.13) liefert $AB_\varepsilon(x_0) \supseteq Ax_0 + \varepsilon B_c = B_{\varepsilon c}(Ax_0) = B_{\varepsilon c}(y)$, d.h. $B_{\varepsilon c}(y) \subseteq AU$, d.h. AU ist offen. ■

Aus dem Satz über die offene Abbildung folgt der Satz von der stetigen Inversen, da die Stetigkeit einer Abbildung äquivalent dazu ist, dass Urbilder offener Mengen offen sind.

3.14 Satz (von der stetigen Inversen). *Seien X und Y Banachräume und $A : X \to Y$ ein linearer, stetiger und bijektiver Operator. Dann ist A^{-1} stetig.*

Beweis : Wir bezeichnen $B := A^{-1} : Y \to X$. Sei $U \subseteq X$ offen. Das Urbild $B^{-1}U$ ist aber die Menge AU, da $B^{-1} = (A^{-1})^{-1} = A$ gilt. Aber nach Satz 3.11 ist die Abbildung A offen, d.h. AU ist offen. Somit ist auch $B^{-1}U$ offen, d.h. $B = A^{-1}$ ist stetig. ■

Eine weitere Folgerung ist die Äquivalenz von Normen.

3.15 Satz. *Der Vektorraum V sei bezüglich der Normen $\|\cdot\|_0$ und $\|\cdot\|_1$ vollständig. Es gelte $\|u\|_1 \le \|u\|_0$ für alle $u \in V$. Dann gibt es eine Konstante $K > 0$, so dass für alle $u \in V$ gilt*

$$\|u\|_0 \le K\|u\|_1\,.$$

Beweis : Wir wenden Satz 3.14 an mit $A = I$ als identischer Abbildung. Der Raum X bzw. Y sei der mit $\|\cdot\|_0$ bzw. $\|\cdot\|_1$ versehene Raum V. Als Abbildung von X nach Y ist die identische Abbildung I stetig, da $\|x\|_1 = \|Ix\|_1 \le \|x\|_0$. Nach Satz 3.14 ist daher die Inverse stetig; daraus folgt, dass ein $K > 0$ existiert mit

$$\|x\|_0 = \|I^{-1}x\|_0 \le K\|x\|_1\,.$$

■

3.16 Satz (vom abgeschlossenen Graphen). *Seien X und Y Banachräume und sei $A : X \to Y$ linear. Der Graph $G(A) := \{(x, Ax) \in X \times Y\}$ sei abgeschlossen in $X \times Y$, d.h. aus $(x_n, Ax_n) \to (x, y)$ in $X \times Y$ folgt $y = Ax$. Dann ist A stetig.*

Beweis : Wir versehen X mit der Graphennorm

$$\|x\|_{G(A)} := \|x\|_X + \|Ax\|_Y\,.$$

Der Raum X versehen mit der Graphennorm ist ein Banachraum. In der Tat, sei $(x_n) \subseteq X$ eine Cauchyfolge, bezüglich $\| \cdot \|_{G(A)}$. Dann sind sowohl $(x_n) \subseteq X$ als auch $(Ax_n) \subseteq Y$ Cauchyfolgen und es gibt Elemente $x \in X$ und $y \in Y$ mit $x_n \to x$ und $Ax_n \to y$. Da der Graph abgeschlossen ist, folgt $y = Ax$ und somit konvergiert x_n bezüglich der Graphennorm gegen x. Weiter gilt

$$\|x\|_X \le \|x\|_{G(A)}$$

und Satz 3.15 liefert die Existenz einer Konstante $K > 0$, mit

$$\|Ax\| \le \|x\| + \|Ax\| = \|x\|_{G(A)} \le K\|x\|,$$

d.h. A ist beschränkt. ∎

Eine weitere überraschende Folgerung aus unseren Sätzen ist der *Satz von Hellinger-Toeplitz:*

3.17 Satz. *Sei H ein Hilbertraum und $A : H \to H$ linear und selbstadjungiert, d.h. für alle $x, y \in H$ gilt: $(Ax, y)_H = (x, Ay)_H$. Dann ist A beschränkt.*

Beweis : Wir wollen Satz 3.16 anwenden und müssen also zeigen, dass der Graph $G(A)$ abgeschlossen ist. Aufgrund der Linearität reicht es zu zeigen, dass aus $x_n \to 0$, $Ax_n \to y$ folgt $y = 0$. Wir haben aber

$$\begin{aligned} \|y\|^2 = (y, y) &= (\lim_{n\to\infty} Ax_n, y) \\ &= \lim_{n\to\infty} (Ax_n, y) = \lim_{n\to\infty} (x_n, Ay) = 0\,. \end{aligned}$$

∎

3.4 Adjungierte Operatoren in Banachräumen

Wir wollen die Ergebnisse von Abschnitt 2.4 auf Banachräume verallgemeinern. Dazu ist es nützlich Orthogonalitätsrelationen in Banachräumen zu betrachten und adjungierte Operatoren einzuführen.

4.1 Definition. *Sei X ein Banachraum. Das* ***Orthogonalkomplement*** *einer Menge $M \subset X$ ist die Menge*

$$M^\perp := \{f \in X^* \,\big|\, \langle f, m\rangle = 0 \quad \text{für alle } m \in M\} \subset X^*\,.$$

Analog definiert man für Mengen $N \subset X^*$ das ***Präorthogonalkomplement*** *durch*

$$N^\perp := \{x \in X \,\big|\, \langle f, x\rangle = 0 \text{ für alle } f \in N\} \subset X\,.$$

Man nennt die Menge $M^{\perp\perp} := (M^\perp)^\perp$ *auch das* ***Biorthogonalkomplement*** *von* M*.*

• *Es ist klar, dass* $M^\perp$ *und* $N^\perp$ *lineare Unterräume sind.*

4.2 Satz. *Sei* X *ein Banachraum und* $W \subset X$ *ein linearer Teilraum. Dann gilt*

$$W^{\perp\perp} = \overline{W}\,.$$

Sei $Y \subset X^*$ *ein linearer Teilraum. Dann gilt*

$$Y^{\perp\perp} \supset \overline{Y}\,.$$

Beweis : Es ist klar, dass $W \subset W^{\perp\perp}$, denn ist $w \in W$, so gilt $\langle f, w\rangle = 0$ für alle $f \in W^\perp$. Dies impliziert $w \in W^{\perp\perp}$. Ferner ist klar, dass $W^{\perp\perp}$ abgeschlossen ist, da $M^\perp$ für jede Menge M abgeschlossen ist. In der Tat, wenn $f_j \to f$, $f_j \in M^\perp$, folgt $0 = \langle f_j, m\rangle \to \langle f, m\rangle$, d.h. $f \in M^\perp$, und entsprechend für $M^{\perp\perp}$.
Da $W \subset W^{\perp\perp}$, gilt somit $\overline{W} \subset W^{\perp\perp}$. Angenommen, $\overline{W}$ wäre echt in $W^{\perp\perp}$ enthalten. Dann gibt es ein $x_0 \in W^{\perp\perp}$ mit $x_0 \notin \overline{W}$. Nach dem Satz von Hahn-Banach (Satz 2.11) gibt es eine abgeschlossene Hyperebene, die x_0 und $\overline{W}$ strikt trennt, d.h. es existiert $f \in X^*$ und $\alpha \in \mathbb{R}$ mit

$$\langle f, x\rangle < \alpha < \langle f, x_0\rangle\,, \qquad x \in \overline{W}\,.$$

Da $\overline{W} \subseteq X$ ein linearer Teilraum ist, folgt $\langle f, x\rangle = 0$ für alle $x \in \overline{W}$ (man ersetze x durch λx, $\lambda \to \pm\infty$, vgl. Beweis Folgerung 2.12), d.h. $f \in \overline{W}^\perp \subseteq X^*$. Da andererseits $x_0 \in W^{\perp\perp} \subseteq X$, gilt dann $\langle f, x_0\rangle = 0$. Dies ist ein Widerspruch und die 1. Behauptung ist bewiesen. Analog beweist man $Y \subset Y^{\perp\perp}$ und dass $Y^{\perp\perp}$ abgeschlossen ist. Daraus folgt die 2. Behauptung und der Satz ist bewiesen. ■

• In der zweiten Behauptung des Satzes gilt keine Gleichheit, denn wenn wir den Beweis analog durchführen wollten, erhielten wir:
Annahme: $\overline{Y} \subsetneqq Y^{\perp\perp} \subseteq X^*$. Dann gibt es ein $f_0 \in Y^{\perp\perp} \setminus \overline{Y} \subseteq X^*$. Nach dem Satz von Hahn-Banach gibt es dann ein $\varphi \in X^{**}$:

$$\varphi(f) < \alpha < \varphi(f_0) \qquad \forall\ f \in \overline{Y}.$$

Dann folgt mit den gleichen Argumenten wie im ersten Teil, dass für alle $f \in \overline{Y}$ gilt $\varphi(f) = 0$. Aber daraus können wir nicht folgern, dass $\varphi \in \overline{Y}^\perp \subseteq X$, da $\varphi \in X^{**}$, d.h. wir können die Annahme nicht zum Widerspruch führen.

- Rettung: $\forall\, \varphi \in V^{**}\ \exists\, x_0 \in X$:

$$\varphi(f) = \langle f, x_0 \rangle$$

Diese Aussage ist richtig für reflexive Banachräume.

- Wir haben folgende Inklusionen:

$$\begin{array}{ccc} W \subseteq X & W^\perp \subseteq X^* & W^{\perp\perp} \subseteq X \\ Y \subseteq X^* & Y^\perp \subseteq X & Y^{\perp\perp} \subseteq X^* \end{array}$$

Insbesondere haben wir im Beweis von Satz 4.2 bewiesen, dass für $W \subseteq X$ und $Y \subseteq X^*$ die linearen Teilräume $W^\perp$ und $Y^\perp$ immer abgeschlossen sind.

Es treten oft, insbesondere in Anwendungen, lineare Operatoren auf, die nicht notwendig beschränkt sind und deren natürlicher Definitionsbereich nicht der ganze Raum ist.

4.3 Beispiel. *Ein typisches Beispiel eines solchen Operators ist die Ableitung. Wir versehen* $C([0,1])$ *mit der üblichen Supremumsnorm und definieren* $A\colon D(A) \subset C([0,1]) \to C([0,1])$*, wobei* $D(A) = C^1([0,1])$*, durch* $Au = u'$*. Dies ist offensichtlich ein linearer Operator. Man überlegt sich leicht, das* A *nicht beschränkt ist.*

4.4 Definition. *Seien* X *und* Y *Banachräume und* $D(A)$ *ein linearer Unterraum von* X*. Für einen linearen Operator* $A : D(A) \subset X \to Y$ *heißt* $D(A)$ **Definitionsbereich** *von* A*,* $R(A) := \{Ax \in Y \,|\, x \in D(A)\}$ **Bildbereich** *von* A *und* $N(A) := \{x \in D(A) \,|\, Ax = 0\}$ **Kern** *von* A*.*

Wir vereinbaren, dass im Folgenden der Definitionsbereich $D(A)$ eines linearen Operators immer ein linearer Unterraum ist.

4.5 Definition. *Seien* X *und* Y *Banachräume,* $A : D(A) \subset X \to Y$ *ein linearer Operator und* $D(A)$ *ein dichter linearer Unterraum von* X*. Wir setzen*

$$D(A^*) := \big\{ v \in Y^* \,\big|\, \exists c \geq 0, \text{ so dass } |\langle v, Au \rangle| \leq c\, \|u\| \text{ für alle } u \in D(A) \big\}.$$

Ist nun $v \in D(A^*)$*, so definiert* $\varphi(u) = \langle v, Au \rangle$ *ein* ***beschränktes lineares Funktional*** *auf* $D(A)$*, welches durch Abschluss auf ganz* X *zu einem Element* $f \in X^*$ *fortgesetzt werden kann, d.h.*

$$\langle f, u \rangle = \varphi(u) = \langle v, Au \rangle \qquad u \in D(A)\,.$$

Man definiert den ***adjungierten Operator*** $A^* : D(A^*) \subseteq Y^* \to X^*$ *durch*

$$A^* v := f\,.$$

Es ist klar, dass f eindeutig ist, denn aus $\langle f, u\rangle = \langle \tilde{f}, u\rangle = \varphi(u)$ für $u \in D(A)$ folgt $f = \tilde{f}$, da $D(A)$ dicht in X ist und $f, \tilde{f}$ stetig sind. Ebenso ist die Linearität von A^* und $D(A^*)$ klar. Auf Grund der Definition von A^* haben wir

$$\langle A^* v, u\rangle_{X^*,X} = \langle v, Au\rangle_{Y^*,Y} \qquad \forall u \in D(A), \forall v \in D(A^*)\,.$$

Im Allgemeinen ist $D(A^*)$ nicht dicht in Y^*, selbst wenn A abgeschlossen ist (siehe Definition 4.6). Falls Y reflexiv ist kann man zeigen, dass $D(A^*)$ dicht in Y^* ist.

Wir wollen nun die Lösbarkeit der Gleichung $Au = f$ betrachten, oder anders gesagt die Charakterisierung des Bildes von A für unbeschränkte, lineare Operatoren A unter der Zusatzvoraussetzung dass A abgeschlossen ist. Für die meisten Anwendungen reicht dies aus.

4.6 Definition. *Seien X und Y Banachräume und sei $A : D(A) \subseteq X \to Y$ ein linearer Operator. Dann heißt A **abgeschlossen**, wenn der Graph*

$$G(A) := \{(v, Av) \,\big|\, v \in D(A)\}$$

abgeschlossen in $X \times Y$ ist.

Man überlegt sich leicht, dass der Ableitungsoperator aus Beispiel 4.3 abgeschlossen ist.

4.7 Lemma. *Seien X und Y Banachräume und sei $A : D(A) \subset X \to Y$ linear, $\overline{D(A)} = X$. Dann ist A^* abgeschlossen, d.h. der Graph $G(A^*) := \big\{(v, A^* v) \big|\, v \in D(A^*)\big\}$ ist abgeschlossen in $Y^* \times X^*$.*

Beweis : Sei $v_n \to v$ in Y^*, $v_n \in D(A^*)$, $A^* v_n \to f$ in X^*. Wir müssen zeigen, dass

$$v \in D(A^*) \qquad \text{und} \qquad A^* v = f\,.$$

Es gilt aber für alle $u \in D(A)$

$$\langle v_n, Au\rangle = \langle A^* v_n, u\rangle\,.$$

Der Grenzübergang $n \to \infty$ liefert

$$\langle v, Au\rangle = \langle f, u\rangle\,,$$

woraus man $v \in D(A^*)$ und $A^* v = f$ abliest. ∎

4.8 Satz. *Seien X und Y Banachräume und sei $A : D(A) \subset X \to Y$ abgeschlossen und linear mit $\overline{D(A)} = X$. Dann gilt:*

(i) $\quad N(A^*) = R(A)^\perp$,

(ii) $\quad N(A) = R(A^*)^\perp$,

(iii) $\quad N(A^*)^\perp \supset R(A)$,

(iv) $\quad N(A)^\perp \supset R(A^*)$.

Beweis : (i) Wir betrachten den Graphen

$$G = G(A) = \big\{(u, Au) \in X \times Y \big|\; u \in D(A)\big\}$$

und den Raum $L = X \times \{0\} \subset X \times Y$. Man beachte, dass G und L in $X \times Y$ abgeschlossen sind. Die Beweisidee besteht darin, $(G+L)^\perp$ auszurechnen:

$$\begin{aligned}(G+L)^\perp &= \{(u+v, Au) \in X \times Y |\;\; u \in D(A),\; v \in X\big\}^\perp \\ &= \big\{(w, Au) \in X \times Y \big|\; u \in D(A),\; w \in X\big\}^\perp \\ &= \big\{(0, f^*) \in X^* \times Y^* \big|\; f^* \perp Au, u \in D(A)\big\} \\ &= \{0\} \times R(A)^\perp \,.\end{aligned}$$

Andererseits gilt ganz allgemein für die Summe zweier Räume

$$(G+L)^\perp = G^\perp \cap L^\perp,$$

denn

$$\begin{aligned}(G+L)^\perp &= \big\{z + y \;\big|\; z \in G\,,\; y \in L\big\}^\perp \\ &= \big\{\varphi^* \big|\; \langle \varphi^*, z\rangle + \langle \varphi^*, y\rangle = 0,\; z \in G,\; y \in L\big\}\,.\end{aligned}$$

Setzt man z bzw. $y = 0$, erhält man, dass das linear beschränkte Funktional φ^* sowohl in $G^\perp$ als auch in $L^\perp$ liegt. Umgekehrt erfüllen diese $\varphi^* \in G^\perp \cap L^\perp$ die verlangte Orthogonalität zu $z + y$. Wir erhalten somit

$$\begin{aligned}\{0\} \times R(A)^\perp &= G^\perp \cap L^\perp \\ &= \big\{(e^*, f^*) \in X^* \times Y^* \big|\; \langle e^*, u\rangle + \langle f^*, Au\rangle = 0, u \in D(A), \text{ und} \\ &\qquad\qquad \langle e^*, v\rangle + \langle f^*, 0\rangle = 0\,, v \in X\big\}.\end{aligned}$$

Falls aber $\langle e^*, v\rangle + \langle f^*, 0\rangle = 0$ für alle $v \in X$, folgt $e^* = 0$, und die letzte Menge $\{\ldots\}$ ist gleich der Menge

$$\big\{(0, f^*) \in X^* \times Y^* \big|\; \langle f^*, Au\rangle = 0\,,\; u \in D(A)\big\}$$

und damit gleich

$$\big\{(0, f^*) \big|\; A^* f^* = 0\big\} = \{0\} \times N(A^*)\,.$$

Damit erhalten wir

$$R(A)^{\perp} = N(A^*)\,, \tag{4.9}$$

d.h. die Behauptung ist damit bewiesen.
(ii) Wir betrachten den Ausdruck $\big(G^{\perp} + L^{\perp}\big)^{\perp}$, G und L wie im Beweis für (i). Einerseits ist

$$\begin{aligned}\big(G^{\perp} + L^{\perp}\big)^{\perp} &= G^{\perp\perp} \cap L^{\perp\perp} = G \cap L \\ &= \big\{(u, Au) \,\big|\, u \in D(A)\big\} \cap \big\{(v, 0) \,\big|\, v \in X\big\} \\ &= \big\{(u, Au) \,\big|\, Au = 0,\ u \in D(A)\big\} \\ &= N(A) \times \{0\},\end{aligned} \tag{4.10}$$

da G und L abgeschlossen sind. Andererseits gelten

$$L^{\perp} = \big\{(0, h^*) \in X^* \times Y^* \,\big|\, h^* \in Y^*\big\}\,,$$

$$G^{\perp} + L^{\perp} = \big\{(e^*, f^*) + (0, h^*) \,\big|\, \langle e^*, u\rangle + \langle f^*, Au\rangle = 0, u \in D(A), h^* \in Y^*\big\}\,.$$

Da alle $h^* \in Y^*$ zugelassen sind, folgt

$$G^{\perp} + L^{\perp} = \big\{(e^*, g^*) \big|\, g^* \in Y^*\,, \exists f^* \text{ mit } \langle e^*, u\rangle + \langle f^*, Au\rangle = 0\,, u \in D(A)\big\}\,.$$

Wenn für ein Paar (e^*, f^*) die Gleichung $\langle e^*, u\rangle + \langle f^*, Au\rangle = 0$ für alle $u \in D(A)$ gilt, so ist $f^* \in D(A^*)$ und

$$\langle e^* + A^* f^*, u\rangle = 0\,, \qquad u \in D(A)\,.$$

Daraus folgt $e^* = -A^* f^*$. Umgekehrt impliziert die letzte Gleichung, dass

$$\langle e^*, u\rangle + \langle f^*, Au\rangle = 0\,.$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned}G^{\perp} + L^{\perp} &= \big\{(-A^* f^*, g^*) \,\big|\, f^* \in D(A^*)\,,\ g^* \in Y^*\big\} \\ &= R(A^*) \times Y^*.\end{aligned}$$

Anwendung der $\perp$-Operation ergibt

$$\big(G^{\perp} + L^{\perp}\big)^{\perp} = R(A^*)^{\perp} \times \{0\}\,.$$

Zusammen mit (4.10) folgt

$$N(A) \times \{0\} = R(A^*)^{\perp} \times \{0\}$$

und damit $N(A) = R(A^*)^\perp$.
(iii) Aus (i) folgt

$$N(A^*)^\perp = R(A)^{\perp\perp},$$

und nach Satz 4.2 gilt $R(A)^{\perp\perp} = \overline{R(A)} \supset R(A)$.
Ähnlich schliesst man für (iv). ∎

Wie im Fall des Hilbertraumes (vgl. Kapitel 2, Folgerung 4.7) lässt sich auch die Aussage des vorigen Satzes verschärfen, wenn man die Abgeschlossenheit des Bildbereiches $R(A)$ fordert:

4.11 Satz. *Seien X und Y Banachräume und $A : D(A) \subset X \to Y$ abgeschlossen, linear und $D(A)$ dicht in X. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

(i) *$R(A)$ ist abgeschlossen.*

(ii) *$R(A^*)$ ist abgeschlossen.*

(iii) *$R(A) = N(A^*)^\perp$.*

(iv) *$R(A^*) = N(A)^\perp$.*

• Die Behauptung (iii) lässt sich so lesen: $Au = f$ ist genau dann lösbar, wenn $\langle v, f\rangle = 0$ für alle $v \in N(A^*)$.

Beweis : Wir begnügen uns damit, aus der Abgeschlossenheit von $R(A)$ zu folgern, dass $R(A) = N(A^*)^\perp$ ist. Dies folgt einfach aus Satz 4.8, (i), durch Anwendung von $\perp$, welches $R(A)^{\perp\perp} = N(A^*)^\perp$ ergibt. Wenn $R(A)$ abgeschlossen, ist $R(A)^{\perp\perp} = R(A)$, woraus (iii) folgt. Analog folgt aus (ii) die Behauptung (iv). Die fehlenden Implikationen können in Brezis: „Analyse fonctionelle“ gefunden werden. ∎

3.5 Schwache Topologie

Wir wollen uns zunächst allgemein mit der Konstruktion von Topologien mit bestimmten Eigenschaften beschäftigen. Sei X ein Vektorraum und seien $(Y_i, \sigma_i)_{i\in I}$ topologische Räume. Für alle $i \in I$ seien $\varphi_i : X \to Y_i$ Abbildungen. Wir suchen die *gröbste* Topologie τ auf X, so daß alle φ_i stetig sind, d.h. die Topologie, die am wenigsten offene Mengen enthält. Seien $\omega_i \subseteq Y_i$ offene Mengen, d.h. $\omega_i \in \sigma_i$, dann sind notwendigerweise alle $\varphi_i^{-1}(\omega_i)$ Elemente von τ.
Wir bezeichnen die Familie aller solcher Mengen mit $(U_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$. Wir suchen nun das kleinste Mengensystem τ, daß $(U_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ enthält und abgeschlossen bzgl. endlicher Durchschnitte und beliebiger Vereinigungen ist. Dazu bilden

wir *zuerst* alle möglichen endlichen Durchschnitte von Mengen aus $(U_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$, d.h. $\bigcap_{\lambda\in\Gamma} U_\lambda, \Gamma \subseteq \Lambda, \Gamma$ endlich. Dieses System bezeichnen wir mit Φ. Danach bilden wir beliebige Vereinigungen von Mengen aus Φ. Dieses neue System sei $\mathcal{F}$. Es ist klar, daß $\mathcal{F}$ abgeschloßen bzgl. beliebigen Vereinigungen ist. Es ist nicht völlig offenschichtlich, daß $\mathcal{F}$ auch abgeschlossen bzgl. endlicher Durchschnitte ist. Aber es gilt:

5.1 Lemma. *Das System $\mathcal{F}$ ist abgeschlossen bzgl. endlicher Durchschnitte.*

Beweis : Übungsaufgabe aus der Mengentheorie. ∎

Somit ist die gesuchte gröbste Topologie τ gegeben durch endliche Durchschnitte von Mengen der Form $\varphi_i^{-1}(\omega_i)$, ω_i offen in Y_i, und beliebigen Vereinigungen solcher Mengen. In Termen von Umgebungen ausgedrückt heißt dies: sei $x \in X$, dann ist eine Umgebungsbasis von x bzgl. τ gegeben durch endliche Durchschnitte der Form $\varphi_i^{-1}(V_i)$, V_i Umgebung von $\varphi_i(x_i)$ in Y_i.
Die Konvergenz von Folgen in der Topologie τ ist vollständig durch die Abbildungen φ_i, $i \in I$ charakterisiert.

5.2 Lemma. *Sei (x_n) eine Folge in X. Die Folge x_n konvergiert gegen $x \in X$ bzgl. τ genau dann, wenn $\varphi_i(x_n) \to \varphi_i(x)$ für alle $i \in I$.*

Beweis : Aus $x_n \to x$ bzgl. τ folgt sofort $\varphi_i(x_n) \to \varphi_i(x)$, da alle φ_i bzgl. τ stetig sind. Umgekehrt sei U eine Umgebung von x. Aufgrund der Konstruktion von τ können wir annehmen, dass U die Form $U = \bigcap_{i\in J} \varphi_i^{-1}(V_i)$, $J \subset I$, J endlich, V_i Umgebung von $\varphi_i(x)$ in Y_i, hat. Für alle $i \in J$ existiert ein N_i mit $\varphi_i(x_n) \in V_i$ für alle $n \geq N_i$. Sei $N = \max N_i$. Dann ist $x_n \in U$ für alle $n \geq N$. ∎

5.3 Lemma. *Sei (Z, σ) ein topologischer Raum und $\psi : (Z, \sigma) \to (X, \tau)$ eine Abbildung. Dann ist ψ stetig genau dann, wenn für alle $i \in I$ die Abbildung $\varphi_i \circ \psi : (Z, \sigma) \to (Y_i, \sigma_i)$ stetig ist.*

Beweis : "$\Rightarrow$" ψ und φ_i sind stetig, also ist auch $\psi \circ \varphi$ stetig.
"$\Leftarrow$" Sei $U \subseteq X$ offen, d.h. $U \in \tau$. U lässt sich also schreiben als:

$$U = \bigcup_{\text{beliebig}} \bigcap_{\text{endlich}} \varphi_i^{-1}(\omega_i), \qquad \omega_i \in \sigma_i.$$

Damit gilt:

$$\begin{aligned}\psi^{-1}(U) &= \psi^{-1}\Big(\bigcap_{\text{beliebig}}\bigcup_{\text{endlich}}\varphi_i^{-1}(\omega_i)\Big)\\ &= \bigcap_{\text{beliebig}}\bigcup_{\text{endlich}}\psi^{-1}\varphi_i^{-1}(\omega_i)\\ &= \bigcap_{\text{beliebig}}\bigcup_{\text{endlich}}(\varphi_i\circ\psi)^{-1}(\omega_i).\end{aligned}$$

Also ist $\psi^{-1}(U)$ offen, d.h. ψ ist stetig.

■

Um die schwache Topologie in einem Banachraum zu erhalten wählen wir die Abbildungen φ_i, $i \in I$, wie folgt: Sei X ein Banachraum und $f \in X^*$. Dann definieren wir

$$\varphi_f : X \to \mathbb{R} : \; x \mapsto \langle f, x\rangle,$$

und erhalten dann die Abbildungen $(\varphi_f)_{f\in X^*}$.

5.4 Definition. *Sei X ein Banachraum und X^* sein Dualraum. Die **schwache Topologie** $\tau(X, X^*)$ ist die gröbste Topologie auf X, bezüglich derer alle Abbildungen $(\varphi_f)_{f\in X^*}$ stetig sind, d.h. wir wenden die obige Konstruktion auf $X = X$, $Y_i = \mathbb{R}$ und $I = X^*$ an.*

5.5 Definition. *Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X$ eine Folge in X. Man sagt, dass (x_n) **schwach gegen** x **konvergiert**, wenn für alle $f \in X^*$ gilt:*

$$\langle f, x_n\rangle \to \langle f, x\rangle \qquad (n \to \infty)$$

Notation: $x_n \rightharpoonup x \; (n \to \infty)$

• Aufgrund von Lemma 5.2 gilt: $x_n \rightharpoonup x \Leftrightarrow x_n \to x$ bezüglich $\tau(X, X^*)$. Um die schwache Konvergenz einer Folge von der Konvergenz bzgl. der Norm, d.h. $\|x_n - x\| \to 0$, zu unterscheiden werden wir diese wie im Hilbertraum als **starke Konvergenz** bezeichnen und durch $x_n \to x$ notieren.

5.6 Satz. *Die schwache Topologie $\tau(X, X^*)$ ist eine Hausdorff Topologie.*

Beweis : Sei $x_1 \neq x_2 \in X$. Zu zeigen ist: $\exists\ U_1, U_2 \in \tau$ mit $x_i \in U_i$ für $i = 1, 2$ und $U_1 \cap U_2 = \emptyset$. Wir wenden die geometrische Variante des Satzes von Hahn-Banach an. Die Menge $\{x_1\}$ ist abgeschlossen und konvex und die Menge $\{x_2\}$ ist konvex und kompakt. Dann folgt mit Satz 2.11, dass es ein $f \in X^*$ und ein $\alpha \in \mathbb{R}$ gibt, mit

$$\langle f, x_1\rangle < \alpha < \langle f, x_2\rangle.$$

Die Mengen $U_1 := f^{-1}(-\infty, \alpha) \in \tau$ und $U_2 := f^{-1}(\alpha, \infty) \in \tau$ besitzen dann die gesuchten Eigenschaften $U_1 \cap U_2 = \emptyset$ und $x_i \in U_i$. ∎

Satz 5.6 impliziert insbesondere, dass der schwache Grenzwert eindeutig bestimmt ist.

5.7 Lemma. *Sei $x_0 \in X$. Eine Umgebungsbasis von x_0 bzgl. $\tau(X, X^*)$ ist durch die Mengen der Form*

$$V = \{x \in X \,\big|\, |\langle f_i, x - x_0 \rangle| < \varepsilon, i \in J\}\,,$$

wobei J endlich ist, $f_i \in X^*$ und $\varepsilon > 0$, gegeben.

Beweis : Es gilt:

$$\begin{aligned} V &= \bigcap_{i \in J} \{x \in X \,\big|\, |\langle f_i, x - x_0 \rangle| < \varepsilon\} \\ &= \bigcap_{i \in J} \Big(f_i^{-1}(-\infty, \langle f_i, x_0 \rangle + \varepsilon) \cap f_i^{-1}(-\varepsilon + \langle f_i, x_0 \rangle, \infty) \Big), \end{aligned}$$

also ist V eine offene Umgebung von x_0. Sei U Umgebung von x_0 bezüglich $\tau(X, X^*)$. Dann folgt wegen der Konstruktion von $\tau(X, X^*)$, dass wir oBdA U schreiben können als $U = \bigcap_{i \in J} \varphi_{f_i}^{-1}(\omega_i)$, wobei ω_i Umgebungen von $\langle f_i, x_0 \rangle$ in $\mathbb{R}$ sind und J endlich. Also gibt es ein $\varepsilon > 0$, so dass $(\langle f_i, x_0 \rangle - \varepsilon, \langle f_i, x_0 \rangle + \varepsilon) \subseteq \omega_i$, $i \in J$, und somit gilt:

$$x_0 \in V = \bigcap_{i \in J} \{x \in X \,\big|\, |\langle f_i, x_0 - x \rangle| < \varepsilon\} \subseteq \bigcap_{i \in J} \varphi_{f_i}^{-1}(\omega_i)\,.$$

∎

5.8 Satz. *Für eine Folge $(x_n) \subseteq X$ gilt:*

(i) *$x_n \to x$ bzgl. $\tau(X, X^*)$ genau dann, wenn $\langle f, x_n \rangle \to \langle f, x \rangle$ für alle $f \in X^*$,*

(ii) *$x_n \to x$ stark in X, dann gilt: $x_n \rightharpoonup x$ schwach in X,*

(iii) *$x_n \rightharpoonup x$ schwach in X, dann ist die Folge $(\|x_n\|)_{n \in \mathbb{N}}$ beschränkt und es gilt:*

$$\|x\| \le \liminf_{n \to \infty} \|x_n\|\,.$$

(iv) *$x_n \rightharpoonup x$ schwach in X und $f_n \to f$ stark in X^*, dann gilt:*

$$\langle f_n, x_n \rangle \to \langle f, x \rangle\,.$$

Beweis : (i) Dies ist gerade Lemma 5.2.

(ii) Für $f \in X^*$ ist $|\langle f, x_n - x\rangle| \le \|f\|_{X^*} \|x_n - x\|_X \to 0$, d.h. $x_n \rightharpoonup x$.

(iii) Da x_n schwach gegen x konvergiert folgt $\langle f, x_n\rangle \to \langle f, x\rangle$ für alle $f \in X^*$, d.h. die Folge reeller Zahlen $\langle f, x_n\rangle$ ist beschränkt. Definiere nun die Operatoren

$$A_n : X^* \to \mathbb{R} : f \mapsto \langle f, x_n\rangle.$$

Diese sind linear und beschränkt, denn $\|A_n\| \le \|x_n\|$. Aus den obigen Überlegungen folgt, dass $(A_n)_n$ punktweise beschränkt ist, d.h. für alle $f \in X^*$ gilt $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} |A_n(f)| < \infty$. Dann ist nach Satz 3.1

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \|A_n\| < \infty,$$

d.h.

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \sup_{\|f\|_{X^*}\le 1} |A_n(f)| < \infty.$$

Aus der Normformel (1.9) und der Definition von A_n folgt

$$\|x_n\| = \sup_{\|f\|_{X^*}\le 1} |\langle f, x_n\rangle| = \sup_{\|f\|_{X^*}\le 1} |A_n(f)| \,.$$

Also ist $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} \|x_n\| < \infty$, d.h. $\|x_n\|$ ist beschränkt. Außerdem wissen wir $|\langle f, x_n\rangle| \le \|f\|_{X^*} \|x_n\|$ und somit gilt:

$$|\langle f, x\rangle| = \liminf_{n\to\infty} |\langle f, x_n\rangle| \le \liminf_{n\to\infty} \|f\|_{X^*} \|x_n\| \,.$$

Wiederum aus der Normformel erhalten wir also

$$\|x\| = \sup_{\|f\|_{X^*}\le 1} |\langle f, x\rangle| \le \sup_{\|f\|_{X^*}\le 1} \|f\|_{X^*} \liminf_{n\to\infty} \|x_n\| = \liminf_{n\to\infty} \|x_n\| \,.$$

(iv) Aus $x_n \rightharpoonup x$ und $f_n \to f$ folgt:

$$\begin{aligned} |\langle f, x\rangle - \langle f_n, x_n\rangle| &\le |\langle f, x\rangle - \langle f, x_n\rangle| + |\langle f, x_n\rangle - \langle f_n, x_n\rangle| \\ &= |\langle f, x - x_n\rangle| + |\langle f - f_n, x_n\rangle| \\ &\le |\langle f, x - x_n\rangle| + \|f - f_n\|_{X^*} \|x_n\| \to 0 \,, \end{aligned}$$

da $\|x_n\|$ nach (iii) beschränkt ist. ∎

5.9 Satz. *Sei X ein endlichdimensionaler Banachraum. Dann stimmen die starke und die schwache Topologie überein. Insbesondere konvergiert eine Folge schwach genau dann, wenn sie stark konvergiert.*

Beweis : Die starke Topologie ist durch die Norm induziert. Sie ist *immer* feiner als die schwache Topologie. Wir müssen also nur zeigen:

U offen bezüglich starker Topologie $\Rightarrow$ U offen bezüglich schwacher Topologie

Sei $x_0 \in X$ und V eine Umgebung von x_0 bezüglich der starken Topologie. Dann gibt es einen Radius $r > 0$, so dass $B_r(x_0) \subseteq V$. Da X endlichdimensional ist, gibt es eine Basis $e_1, \dots e_n$ von X mit $\|e_i\| = 1$. Für jedes $x \in X$ gibt es dann eindeutige $x_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, n$ mit $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$. Wir definieren die Abbildungen $f_i \in X^*$ durch $f_i : X \to \mathbb{R} : x \mapsto x_i$. Dann folgt:

$$\begin{aligned}
\|x - x_0\| &= \|\sum_{i=1}^{n}(x - x_0)_i e_i\| \\
&= \|\sum_{i=1}^{n}\langle f_i, x - x_0\rangle e_i\| \\
&\leq \sum_{i=1}^{n} |\langle f_i, x - x_0\rangle|,
\end{aligned}$$

da $\|e_i\| = 1$. Setze

$$U := \bigcap_{i=1}^{n} \{x \in X \,\big|\, |\langle f_i, x - x_o\rangle| < \frac{r}{n}\}\,.$$

Dann ist U offene Umgebung von x_0 bezüglich $\tau(X, X^*)$ und für $x \in U$ gilt:

$$\|x - x_0\| \leq \sum_{i=1}^{n} |\langle f_i, x - x_0\rangle| < \sum_{i=1}^{n} \frac{r}{n} = n\frac{r}{n} = r\,.$$

Also ist $x \in B_r(x_0)$, d.h. $x_0 \in U \subseteq B_r(x_0) \subseteq V$, d.h. V ist Umgebung von x_0 bezüglich $\tau(X, X^*)$. ■

• Nach Konstruktion ist die schwache Topologie *immer* gröber als die starke Topologie, d.h. U ist offen bzgl. der schwachen Topologie impliziert, dass U offen bzgl. der starken Topologie ist.
• Wenn $\dim X < \infty$ ist, dann stimmen die starke und die schwache Topologie überein. Wenn $\dim X = \infty$ ist, dann ist im Allgemeinen die starke Topologie eine *echte* Obermenge der schwachen Topologie. Analoge Aussagen gelten für abgeschlossene Mengen.

5.10 Beispiel. (i) *Sei* $\dim X = \infty$ *und* $S := \{x \in X \,\big|\, \|x\| = 1\}$. *Dann ist* S *stark abgeschlossen, aber* ***nicht*** *schwach abgeschlossen. Es gilt*

$$\overline{S}^{\tau(X,X^*)} = \overline{B_1(0)}\,. \tag{5.11}$$

Beweis : Sei $x_0 \in X$ mit $\|x_0\| < 1$. Wir müssen zeigen, dass $x_0 \in \overline{S}^\tau$. Sei also V Umgebung von x_0 bezüglich $\tau(X, X^*)$. Zu zeigen: $V \cap S \neq \emptyset$.

Nach Lemma 5.7 können wir oBdA $V = \bigcap_{i=1}^{n} \{x \in X \,\big|\, |\langle f_i, x - x_0\rangle| < \varepsilon\}$ mit $\varepsilon > 0$ und $f_i \in X^*$ annehmen. Es gibt ein $y_0 \in X$, $y_0 \neq 0$, so dass für alle $i = 1, \ldots, n : \langle f_i, y_0\rangle = 0$. Falls dem nicht so wäre, wäre die Abbildung $\varphi : X \to \mathbb{R}^n : x \mapsto (\langle f_i, x\rangle)_{i=1,\ldots,n}$ injektiv. Dann ist $\varphi : X \to \varphi(X)$ ein Isomorphismus. Also folgt $\dim X \leq n$ im Widerspruch zu $\dim X = \infty$. Also gibt es so ein y_0 mit obiger Eigenschaft. Betrachte

$$g : [0, \infty) \to [0, \infty) : t \mapsto \|x_0 + t y_0\| \,.$$

Dann ist g stetig, $g(0) = \|x_0\| < 1$ und $\lim_{t\to\infty} g(t) = \infty$. Nach dem Mittelwertsatz gibt es also ein t_0 mit $g(t_0) = 1$. Aus $\langle f_i, y_0\rangle = 0$, $i = 1, \ldots, n$, folgt $\langle f_i, x_0 + t_0 y_0 - x_0\rangle = 0$, $i = 1, \ldots, n$. Somit ist $x_0 + t_0 y_0 \in V \cap S$ und wir haben gezeigt, dass $S \subseteq \overline{B_1(0)} \subseteq \overline{S}^\tau$. Daraus folgt $\overline{S}^\tau \subseteq \overline{\overline{B_1(0)}}^\tau \subseteq \overline{S}^\tau$. Der folgenden Satz 5.13 besagt, dass für konvexe Mengen gilt $\overline{M} = \overline{M}^\tau$. Somit folgt die Behauptung. ∎

(ii) *Sei* $\dim X = \infty$. *Dann ist* $B_1(0)$ ***nicht*** *offen bezüglich* $\tau(X, X^*)$, *genauer*

$$\operatorname{int}_\tau B_1(0) = \emptyset \,. \tag{5.12}$$

Beweis : Sei $x_0 \in \operatorname{int}_\tau B_1(0)$. Dann existiert eine Umgebung V von x_0 bezüglich τ, so dass $V \subseteq B_1(0)$ und für alle $x_0 \in B_1(0)$ gibt es nach obigem Beweis t_0, $y_0 \neq 0$ mit $\|x_0 + t_0 y_0\| = 1$ und $x_0 + t_0 y_0 \in V \subseteq B_1(0)$, ein Widerspruch. ∎

5.13 Satz. *Sei $C \subseteq X$ eine konvexe Teilmenge eines Banachraumes X. Dann ist C stark abgeschlossen genau dann, wenn C schwach abgeschlossen ist.*

Beweis : Die Richtung

$$\text{„}C \text{ ist schwach abgeschlossen“} \Rightarrow \text{„}C \text{ ist stark abgeschlossen“}$$

ist trivial, da die schwache Topologie gröber ist als die starke. Sei also C stark abgeschlossen. Wir müssen zeigen, dass das Komplement von C bezüglich der schwachen Topologie offen ist. Sei $x_0 \notin C$. Nach dem Satz von Hahn-Banach existiert eine x_0 und C strikt trennende abgeschlossene Hyperebene, d.h. es existiert ein $f \in X^*$ und ein $\alpha \in \mathbb{R}$ mit

$$\langle f, x_0\rangle < \alpha < \langle f, y\rangle \,, \qquad y \in C \,.$$

Die Menge (vgl. Lemma 5.7)

$$V = \{x \in X \,|\, \langle f, x\rangle < \alpha\}$$

ist aber eine bezüglich der schwachen Topologie offene Menge. Offenbar ist $x_0 \in V$ und $V \cap C = \emptyset$. Also ist C abgeschlossen bezüglich der schwachen Topologie. ∎

5.14 Folgerung (Satz von Mazur). *Es sei $(x_n) \subseteq X$ eine schwach konvergente Folge in einem Banachraum X. Dann gibt es eine Folge (y_j) von konvexen Linearkombinationen*

$$y_j = \sum_{k=1}^{N_j} c_k^j x_{n_{kj}}\,, \qquad c_k^j \geq 0\,, \ \sum_{k=1}^{N_j} c_k^j = 1$$

die stark gegen den schwachen Limes der Folge (x_n) konvergiert.

Beweis : Wir bilden die Menge C aller endlichen konvexen Linearkombinationen von Elementen x_n. C ist offensichtlich konvex, ebenso der Abschluss $\overline{C}$ bezüglich der starken Topologie. Ist nun $x_n \rightharpoonup x$ schwach, so muss wegen Satz 5.13 x ebenfalls in $\overline{C}$ liegen. Nach Definition von $\overline{C}$ gibt es dann aber eine Folge $(y_j) \subseteq C$, die stark gegen x geht. Die Elemente aus C haben aber gerade die gesuchte Gestalt. ∎

• Die Abbildung $\varphi : X \to \mathbb{R}$ heißt **unterhalbstetig** (bzw. **oberhalbstetig**) genau dann, wenn $\varphi^{-1}((-\infty, r])$ (bzw. $\varphi^{-1}([r, \infty))$) für alle $r \in \mathbb{R}$ abgeschlossen ist.

5.15 Folgerung. *Sei $\varphi : X \to \mathbb{R}$ eine konvexe, unterhalbstetige Funktion bezüglich der starken Topologie. Dann ist φ auch unterhalbstetig bezüglich der schwachen Topologie.*

Beweis : Zu zeigen ist, dass für alle $r \in \mathbb{R}$ die Menge

$$A := \{x \in X \,|\, \varphi(x) \leq r\}$$

abgeschlossen ist bezüglich $\tau(X, X^*)$. φ ist konvex, also ist A konvex, denn für $x, y \in A$ gilt

$$\varphi(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda\varphi(x) + (1-\lambda)\varphi(y) \leq \lambda r + (1-\lambda)r = r.$$

Nach Voraussetzung ist A stark abgeschlossen, also folgt mit Satz 5.13, dass A schwach abgeschlossen ist. ∎

Für den Beweis von Satz 5.17 benötigen wir das folgende Lemma.

5.16 Lemma. *Sei $T : (E, \tau) \to (F, \sigma)$ eine stetige Abbildung topologischer Hausdorffräume. Dann ist $G(T)$ abgeschlossen bezüglich $\tau \times \sigma$.*

Beweis : Wir zeigen, dass $(E \times F) \setminus G(T)$ offen ist. Für beliebige $(x_0, y_0) \in (E \times F) \setminus G(T)$ gilt $y_0 \neq Tx_0$. Es gibt also Umgebungen U_0, $V_0 \in \sigma$ mit $y_0 \in U_0$, $Tx_0 \in V_0$ und $V_0 \cap U_0 = \emptyset$. T ist stetig, also ist $W_0 := T^{-1}(V_0) \in \tau$, $x_0 \in W_0$. Die Menge $W_0 \times U_0$ ist offen bzgl. $\tau \times \sigma$ und es gilt $(W_0 \times U_0) \cap G(T) = \emptyset$. In der Tat, für $(x, y) \in W_0 \times U_0 \cap G(T)$ gilt $y = Tx \in U_0$ mit $x \in W_0 = T^{-1}(V_0)$, also $Tx \in V_0$. Dies ist ein Widerspruch zu $U_0 \cap V_0 = \emptyset$. ∎

5.17 Satz. *Seien X, Y Banachräume und $A : X \to Y$ ein linearer Operator. Dann ist A stetig bezüglich der starken Topologien genau dann, wenn A stetig bezüglich der schwachen Topologien ist.*

Beweis : (i) Sei A stetig bezüglich der starken Topologien. Wir wollen zeigen, dass $A : (X, \tau(X, X^*)) \to (Y, \tau(Y, Y^*))$ stetig ist. Nach Lemma 5.3 reicht es zu zeigen, dass für alle $f \in Y^*$ die Abbildung

$$\varphi := f \circ A : (X, \tau(X, X^*)) \to (\mathbb{R}, |\cdot|) : \; x \mapsto \langle f, Ax \rangle$$

stetig ist. Da $\varphi = f \circ A \in X^*$ erhalten wir aufgrund der Konstruktion der schwachen Topologie $\tau(X, X^*)$, dass $\varphi^{-1}(\omega) \in \tau(X, X^*)$ für alle offenen Mengen $\omega \subset \mathbb{R}$. Also ist $\varphi : (X, \tau(X, X^*)) \to (\mathbb{R}, |\cdot|)$ stetig.

(ii) Sei $A : (X, \tau(X, X^*)) \to (Y, \tau(Y, Y^*))$ stetig und linear. Wir müssen zeigen, dass A stetig bezüglich der starken Topologien ist. Aber Lemma 5.16 angewendet in unserer Situation liefert, dass $G(A)$ abgeschlossen ist bezüglich $\tau(X, X^*) \times \tau(Y, Y^*)$. Da die schwache Topologie gröber ist als die starke, folgt dass $G(A)$ abgeschlossen ist bezüglich der starken Topologie. Da A linear ist, folgt dann mit Satz 3.16, dass A stetig ist. ∎

3.6 $*$-Schwache Topologie

Auf dem Dualraum X^* eines normierten Raumes kann man neben der starken Topologie (gegeben durch die Norm in X^* (vergleiche Kap. 1.2 (3.2)) und der schwachen Topologie $\tau(X^*, X^{**})$ noch die $*$-schwache Topologie $\tau(X^*, X)$ definieren. Für $x \in X$ definieren wir $\varphi_x : X^* \to \mathbb{R}$ durch

$$\varphi_x(f) := \langle f, x \rangle$$

und betrachten die Familie $(\varphi_x)_{x \in X}$.

6.1 Definition. *Die* ***$*$-schwache Topologie*** $\tau(X^*, X)$ *auf dem Dualraum* X^* *eines normierten Vektorraumes* X *ist die gröbste Topologie bzgl. derer alle Abbildungen* $(\varphi_x)_{x\in X}$ *stetig sind, das heißt wir setzen* $X = X^*$, $Y_i = \mathbb{R}, I = X$ *in Abschnitt 3.5.*

6.2 Satz. *Die $*$-schwache Topologie ist eine Hausdorff Topologie.*

BEWEIS : Seien $f_1,\ f_2 \in X^*$, $f_1 \neq f_2$. Dann gibt es ein $x \in X$: mit $\langle f_1, x\rangle \neq \langle f_2, x\rangle$. Sei $\langle f_1, x\rangle < \langle f_2, x\rangle$. Also gibt es ein $\alpha \in \mathbb{R}$: $\langle f_1, x\rangle < \alpha < \langle f_2, x\rangle$. Setze

$$U_1 := \{f \in X^* \,|\, \langle f, x\rangle < \alpha\} = \varphi_x^{-1}(-\infty, \alpha),$$
$$U_2 := \{f \in X^* \,|\, \langle f, x\rangle > \alpha\} = \varphi_x^{-1}(\alpha, \infty).$$

Dann gilt: $U_1,\ U_2 \in \tau(X^*, X)$, $f_1 \in U_1$, $f_2 \in U_2$, $U_1 \cap U_2 = \emptyset$ ■

• Wir sagen, die Folge $(f_n)_n \subseteq X^*$ **konvergiert $*$-schwach** gegen $f \in X^*$ genau dann, wenn $f_n \to f$ bezüglich $\tau(X^*, X)$. Wir benutzen die Notation

$$f_n \stackrel{*}{\rightharpoonup} f \qquad (n \to \infty)$$

Dies ist nach Lemma 5.2 äquivalent zu

$$\langle f_n, x\rangle \to \langle f, x\rangle \qquad (n \to \infty)\,\forall\, x \in X,$$

d.h. punktweise Konvergenz.

• Wir wollen nun die Topologien $\tau(X^*, X)$, $\tau(X^*, X^{**})$ und die starke Topologie (induziert durch die Operatornorm in X^*) miteinander vergleichen. Dazu benötigen wir folgende Überlegung: Sei X ein Banachraum, X^* sein Dualraum mit der Norm

$$\|f\|_{X^*} = \sup_{\|x\|_X \le 1} |\langle f, x\rangle_{X^*,X}|$$

und X^{**} sein Bidualraum mit der Norm

$$\|g\|_{X^{**}} = \sup_{\|f\|_{X^*} \le 1} |\langle g, f\rangle_{X^{**},X^*}|\ .$$

Die **kanonische Isometrie** $J : X \to X^{**}$ wird wie folgt definiert: sei $x \in X$ fest, die Abbildung $f \mapsto \langle f, x\rangle$ von X^* nach $\mathbb{R}$ ist ein beschränktes, lineares Funktional auf X^*, d.h. ein Element von X^{**}, das mit Jx bezeichnet wird. Wir haben also

$$\langle Jx, f\rangle_{X^{**},X^*} = \langle f, x\rangle_{X^*,X} \quad \forall x \in X, f \in X^*\,. \tag{6.3}$$

Es ist klar, daß J linear und eine Isometrie ist, d.h. $\|Jx\|_{X^{**}} = \|x\|_X$ für alle $x \in X$. In der Tat gilt:

$$\|Jx\|_{X^{**}} = \sup_{\|f\|_{X^*}\le 1} |\langle Jx, f\rangle| \overset{(6.3)}{=} \sup_{\|f\|_{X^*}\le 1} |\langle f, x\rangle| \overset{(1.9)}{=} \|x\| \,.$$

Allerdings ist J nicht notwendig surjektiv. Man kann aber immer mit Hilfe von J den Raum X mit einem abgeschlossenen Unterraum von X^{**} identifizieren.

Beispiel: Wir werden zeigen, dass $(L^1(\Omega))^* = L^\infty$ und $(L^\infty(\Omega))^* \supsetneqq L^1(\Omega)$, d.h. $L^1(\Omega) \subsetneqq (L^1(\Omega))^{**}$.

• Sei X ein Banachraum. Dann sind auf X^* die schwache $\tau(X^*, X^{**})$ und die $*$-schwache $\tau(X^*, X)$ und die starke Topologie σ definiert. Da $X \subseteq X^{**}$, ist $\tau(X^*, X) \subseteq \tau(X^*, X^{**}) \subseteq \sigma$. Wir werden zeigen, dass die abgeschlossene Einheitskugel

$$\overline{B_1(0)} = \{f \in X^* \,|\, \|f\| \le 1\}$$

kompakt bezüglich $\tau(X^*, X)$ ist (Satz 6.10).

• Wenn $\dim X < \infty$ ist, wissen wir aus der linearen Algebra, dass dann

$$\dim X = \dim X^* = \dim X^{**}$$

und somit sind nach Satz 5.9 alle Topologien identisch.
Völlig analog zu Lemma 5.7 und Satz 5.8 beweist man:

6.4 Lemma. *Sei $f_0 \in X^*$. Eine Umgebungsbasis von f_0 bzgl. $\tau(X^*, X)$ ist durch Mengen der Form*

$$V = \{f \in X^* \,|\, |\langle f - f_0, x_i\rangle| < \varepsilon, i \in J\} \,,$$

wobei J endlich ist, $x_i \in X$ und $\varepsilon > 0$, gegeben.

6.5 Lemma. *Für eine Folge $(f_n) \subseteq X^*$ gilt:*

(i) *$f_n \to f$ bzgl. $\tau(X^*, X)$ genau dann, wenn für alle $x \in X$*

$$\langle f_n, x\rangle \to \langle f, x\rangle \,,$$

(ii) *$f_n \to f$ stark in X^*, dann gilt $f_n \rightharpoonup f$ schwach in X^*,*
$f_n \rightharpoonup f$ schwach in X^*, dann gilt $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$ $*$-schwach in X^*,

(iii) *$f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$ $*$-schwach in X^*, dann ist die Folge $(\|f_n\|_{X^*})$ beschränkt und es gilt*

$$\|f\|_{X^*} \le \liminf_{n\to\infty} \|f_n\|_{X^*} \;,$$

(iv) $f_n \xrightarrow{*} f$ *∗-schwach in* X^* *und* $x_n \to x$ *stark in* X*, dann gilt*

$$\langle f_n, x_n \rangle \to \langle f, x \rangle.$$

6.6 Satz. *Sei* $\varphi : X^* \to \mathbb{R}$ *linear und stetig bezüglich* $\tau(X^*, X)$*. Dann existiert ein* $x \in X$ *mit*

$$\varphi(f) = \langle f, x \rangle \quad \forall\, f \in X^*. \tag{6.7}$$

Um dies zu beweisen, benötigen wir folgendes Lemma:

6.8 Lemma. *Sei* X *ein Vektorraum und seien* $\varphi, \varphi_1, \dots, \varphi_n$ *Linearformen auf* X *mit der Eigenschaft*

$$\varphi_i(x) = 0 \quad \forall\, i = 1, \dots, n \qquad \Rightarrow \qquad \varphi(x) = 0\,. \tag{6.9}$$

Dann existieren $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ *so, dass*

$$\varphi = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \varphi_i.$$

Beweis : Betrachte

$$F : X \to \mathbb{R}^{n+1} : \, x \mapsto (\varphi(x), \varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x))^\top\,.$$

Mit (6.9) folgt, dass $a = (1, 0, \dots, 0)^\top \notin R(F)$. Weiterhin ist $R(F)$ ein abgeschlossener, linearer Unterraum. Also gibt es nach Satz 2.11 eine Hyperebene auf $\mathbb{R}^{n+1}$, die a und $R(F)$ strikt trennt, d.h. es existieren $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ und ein $\alpha \in \mathbb{R}$ mit

$$\lambda_0 < \alpha < \lambda_0 \varphi(x) + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \varphi_i(x) \qquad \forall\, x \in X\,.$$

Da X ein linearer Raum ist, gilt die Aussage nicht nur für x, sondern auch für βx und wir können mit $\beta \to \pm\infty$ gehen. Dann folgt (vgl. Beweis Folgerung 2.12)

$$0 = \lambda_0 \varphi(x) + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \varphi_i(x)\,,$$

aber da $\lambda_0 < \alpha < 0$ ist $\lambda_0 \neq 0$. Wir können also durch λ_0 teilen und erhalten:

$$\varphi(x) = -\sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda_i}{\lambda_0} \varphi_i(x)\,,$$

wir haben also also die gesuchte Darstellung gefunden. ∎

Beweis (Satz 6.6): Da $\varphi : X^* \to \mathbb{R}$ linear und stetig bezüglich $\tau(X^*, X)$ ist, gibt es eine Umgebung V von 0 bezüglich $\tau(X^*, X)$ mit

$$|\varphi(f)| < 1 \qquad \forall\, f \in V\,.$$

OBdA sei V von der Form

$$V = \{f \in X^* \,\big|\, |\langle f, x_i\rangle| < \varepsilon,\, i = 1, \ldots, n\}$$

mit $x_i \in X$, $\varepsilon > 0$. Insbesondere hat V folgende Eigenschaft: Falls f derart ist, dass

$$\langle f, x_i\rangle = 0 \qquad i = 1, \ldots, n\,,$$

dann ist auch $\varphi(f) = 0$. In der Tat ist $f \in V$ und für alle $\alpha \in \mathbb{R}$ ist auch $\alpha f \in V$. Also ist $|\alpha||\varphi(f)| < 1$ und nach Übergang $|\alpha| \to \infty$ folgt $\varphi(f) = 0$. Um Lemma 6.8 anwenden zu können, betrachten wir $\varphi_i(f) = \langle f, x_i\rangle$, $f \in X^*$, $i = 1, \ldots, n$ und $\varphi(f)$. φ_i und φ sind Linearformen auf X^*. Nach Lemma 6.8 gibt es $\lambda_i \in \mathbb{R}$, so dass für alle $f \in X^*$ gilt:

$$\varphi(f) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \varphi_i(f) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \langle f, x_i\rangle = \langle f, \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i\rangle =: \langle f, x\rangle\,.$$

■

6.10 Satz (Banach-Alaoglu-Bourbaki). *Der abgeschlossene Ball mit Radius $r > 0$*

$$B^r_{X^*} := \{f \in X^* \,\big|\, \|f\|_{X^*} \le r\}$$

des Dualraumes eines Banachraumes X ist kompakt bezüglich der $*$-schwachen Topologie $\tau(X^*, X)$.

• Kurzausflug in die Topologie

Für topologische Räume (X_i, τ_i) betrachtet man den Produktraum $\prod\limits_{i \in I} X_i$ und Projektionen

$$\pi_j : \prod_{i \in I} X_i \to X_j : (x_i)_{i \in I} \mapsto x_j.$$

Die kanonische Topologie auf $\prod\limits_{i \in I} X_i$ ist die schwache Topologie aus Abschnitt 3.5 mit $X = \prod\limits_{i \in I} X_i$, $Y_i = X_i$, $\varphi_i = \pi_i$. Dies ist die gröbste Topologie, bezüglich derer die π_i, $i \in I$, stetig sind. Diese Topologie ist Hausdorff, da die π_i stetig sind und die X_i Hausdorff.

6.11 Satz (Tychonoff). *Seien (X_i, τ_i) topologische Räume. Der Produktraum $(\prod\limits_{i \in I} X_i, \tau)$ ist genau dann kompakt, wenn X_i, $i \in I$, kompakt sind.*

Beweis : „$\Rightarrow$" Wenn $f : (X,\tau) \to (Y,\sigma)$ stetig ist und X kompakt, dann ist auch das Bild $f(X)$ kompakt. Nach Konstruktion sind die $\pi_j : \prod_{i\in I} X_i \to X_j$ stetig und da $\prod_{i\in I} X_i$ kompakt ist, ist $\pi_j(\prod_{i\in I} X_i) = X_j$ kompakt.

„$\Leftarrow$" Der Beweis benutzt Hilfsmittel, die wir noch nicht kennen und wird deshalb weggelassen. Er kann z.B. im Buch von Rudin, Funktionalanalysis oder im Buch von Meise, Vogt, Funktionalanalysis gefunden werden. ■

Beweis (Satz 6.10): Betrachte den Raum $\mathbb{R}^X = Z := \prod_{x\in X} \mathbb{R}_x$ mit Elementen $\omega = (\omega_x)_{x\in X}$, $\omega_x \in \mathbb{R}$. Wir versehen Z mit der kanonischen Topologie τ, außerdem versehen wir X^* mit der $*$-schwachen Topologie $\tau(X, X^*)$. Die Projektionen $\pi_y : Z \to \mathbb{R} :\ \omega = (\omega_x)_{x\in X} \mapsto \omega_y$ sind stetig für alle $y \in X$. Betrachte die Abbildung

$$\Phi : X^* \to Z :\ f \mapsto (\langle f, x\rangle)_{x\in X}$$

Nach Lemma 5.3 ist Φ stetig genau dann, wenn für alle $y \in X$ gilt, dass die Abbildung

$$\pi_y \circ \Phi : X^* \to \mathbb{R}$$

stetig ist. Sei $y \in X$, dann ist $\pi_y \circ \Phi(f) = \langle f, y\rangle$ linear. Für $\varepsilon > 0$ ist die Menge $\{f \in X^* \,\big|\, |\langle f, x\rangle| < \varepsilon\}$ eine offene Umgebung der Null bezüglich $\tau(X^*, X)$ und somit ist $\pi_y \circ \Phi$ stetig.

Wir zeigen, dass $\Phi : X^* \to \Phi(X^*)$ ein Homöomorphismus ist, d.h. wir zeigen, dass Φ bijektiv ist und dass Φ und Φ^{-1} stetig sind. Offensichtlich ist $\Phi : X^* \to \Phi(X^*)$ surjektiv. Sei $\Phi(f) = \Phi(g)$, dann ist $\langle f, x\rangle = \langle g, x\rangle$ für alle $x \in X$, d.h. $f = g$, also ist Φ injektiv. Wir müssen noch zeigen, dass die Umkehrabbildung

$$\Phi^{-1} : \Phi(X^*) \to X^*$$

stetig ist. Wir wenden wieder Lemma 5.3 an, wir müssen also nur zeigen, dass für alle $y \in X$ die Abbildung $\varphi_y \circ \Phi^{-1} : \Phi(X^*) \to \mathbb{R}$ stetig ist. Sei $\omega \in \Phi(X^*)$, dann hat ω die Form $\omega = (\langle f, x\rangle)_{x\in X}$, $f \in X^*$, also ist $\Phi^{-1}(\omega) = f$. Aber es gilt: $\varphi_y(g) = \langle g, y\rangle$, $g \in X^*$. Für $\omega \in \Phi(X^*)$ ist $\varphi_y(\Phi^{-1}(\omega)) = \langle f, y\rangle = \omega_y = \pi_y\omega$. Aber $\varphi_y \circ \Phi^{-1}$ ist somit gerade $\pi_y|_{\Phi(X^*)}$ und also stetig.

Sei

$$K_r := \{\omega \in Z \,\big|\, |\omega_x| \le r\,\|x\|,\ \omega_{x+y} = \omega_x + \omega_y,\ \omega_{\lambda x} = \lambda\omega_x \quad \forall\, x, y \in X,\ \lambda \in \mathbb{R}\}.$$

Wir zeigen $\Phi(B^r_{X^*}) = K_r$:

„$\subseteq$" Sei $\omega \in \Phi(B^r_{X^*})$. Dann existiert $f \in X^*$ mit $\|f\|_{X^*} \le r$ und $\Phi(f) = (\langle f, x\rangle)_{x\in X} = \omega$. Dann ist

$$|\omega_x| = |\pi_x(\Phi(f))| = |\langle f, x\rangle| \le \|f\|\,\|x\| \le r\,\|x\|\,.$$

Weiterhin gilt:

$$\omega_{x+y} = \langle f, x+y \rangle = \langle f, x \rangle + \langle f, x \rangle = \omega_x + \omega_y \,.$$

Analog zeigt man $\omega_{\lambda x} = \lambda \omega_x$. Also ist $\omega \in K_r$.

„$\supseteq$“ Für $\omega \in K_r$ gilt $\omega_{x+y} = \omega_x + \omega_y$, $\omega_{\lambda x} = \lambda \omega_x$. Wir definieren f durch:

$$\langle f, x \rangle := \omega_x \,.$$

Dann ist f linear und es gilt:

$$|\langle f, x \rangle| = |\omega_x| \leq r \, \|x\| \,,$$

also ist f stetig mit $\|f\| \leq r$. Somit ist $\omega = \Phi(f) \in B^r_{X^*}$.

Es reicht also zu zeigen, dass K_r kompakt ist, denn da $K_r = \Phi(B^r_{X^*})$ und Φ ein Homöorphismus, ist dann auch $\Phi^{-1}(K_r) = B^r_{X^*}$ kompakt. Wir teilen K_r auf in zwei Mengen:

$$K_r = K_1 \cap K_2$$

mit

$$K_1 := \{\omega \in Z \,\big|\, |\omega_x| \leq r \, \|x\| \, \forall \, x \in X\}$$

und

$$K_2 := \{\omega \in Z \,\big|\, \omega_{x+y} = \omega_x + \omega_y, \, \omega_{\lambda x} = \lambda \omega_x \, \forall \, x, y \in X, \, \lambda \in \mathbb{R}\} \,.$$

Offensichtlich kann man K_1 schreiben als

$$K_1 = \prod_{x \in X} [-r \, \|x\|, r \, \|x\|] \,.$$

Da die Intervalle $[-r \, \|x\|, r \, \|x\|]$ in $\mathbb{R}$ kompakt sind, ist nach Satz 6.11 auch ihr Produkt und somit K_1 kompakt. K_2 ist abgeschlossen, denn für x, y fest, aber beliebig, betrachte

$$A_{x,y} := \{\omega \in Z \,\big|\, \omega_{x+y} - \omega_x - \omega_y = 0\}$$

und für $\lambda \in \mathbb{R}$, $x \in X$ fest, aber beliebig, betrachte

$$B_{\lambda,x} = \{\omega \in Z \,\big|\, \omega_{\lambda x} - \lambda \omega_x = 0\} \,.$$

Urbilder der Null unter stetigen Abbildungen sind abgeschlossen, also ist auch ihr Durchschnitt

$$K_2 = \Big(\bigcap_{x,y \in X} A_{x,y} \Big) \cap \Big(\bigcap_{\lambda \in \mathbb{R}, \, x \in X} B_{\lambda,x} \Big)$$

abgeschlossen. Also ist $K_1 \cap K_2$ eine abgeschlossene Teilmenge von K_1 und nach Kapitel 1.2, Lemma 3.15 ist K_r kompakt. ∎

3.7 Reflexive Räume

7.1 Definition. *Sei X ein Banachraum und sei $J : X \to X^{**}$ die durch (6.3) definierte kanonische Isometrie von X nach X^{**}. Dann heißt X* ***reflexiv*** *genau dann, wenn J surjektiv ist.*

• Wenn X reflexiv ist, sind X und X^{**} identifizierbar.
• Es gibt einen Banachraum X und eine lineare, surjektive Isometrie von X auf X^{**}, so dass X nicht reflexiv ist.
• Wenn X reflexiv ist, stimmen die $*$-schwache Topologie $\tau(X^*, X)$ und die schwache Topologie $\tau(X^*, X^{**})$ überein.
• Aufgrund der Definition von reflexiv und schwacher bzw. $*$-schwacher Konvergenz erhält man sofort, daß für reflexive Banachräume X schwache und $*$-schwache Konvergenz in X^* übereinstimmen.

7.2 Satz (Kakutani). *X ist reflexiv genau dann, wenn*

$$B_X := \{x \in X \,|\, \|x\| \le 1\}$$

kompakt bezüglich der schwachen Topologie $\tau(X, X^*)$ ist.

7.3 Folgerung. *X ist reflexiv genau dann, wenn für alle $r > 0$*

$$B_X^r := \{x \in X \,|\, \|x\| \le r\}$$

kompakt bezüglich der schwachen Topologie $\tau(X, X^*)$ ist.

Beweis : „$\Rightarrow$“ Sei X reflexiv. Für jedes $r > 0$ ist die Abbildung $A_r : X \to X : x \mapsto rx$ stetig bzgl. der Normtopologie auf X. Satz 5.17 liefert also, dass A_r auch stetig bzgl. der schwachen Topologie $\tau(X, X^*)$ ist. Dies, Satz 7.2 und $A_r(B_X) = r\,B_X = B_X^r$ liefert die Behauptung.

„$\Leftarrow$“ Dies folgt offensichtlich aus Satz 7.2. ■

Beweis (Satz 7.2) „$\Rightarrow$“: Da X reflexiv ist, ist J surjektiv, d.h. $J(X) = X^{**}$. Da J eine Isometrie ist, ist $J(B_X) = B_{X^{**}}$. Aus Satz 6.10 wissen wir, dass $B_{X^{**}}$ kompakt ist bezüglich $\tau(X^{**}, X^*)$. Wir zeigen nun, dass

$$J^{-1} : (X^{**}, \tau(X^{**}, X^*)) \to (X, \tau(X, X^*))$$

stetig ist. Nach Lemma 5.3 reicht es, zu zeigen, dass für alle $f \in X^*$ die Abbildung

$$\omega \mapsto \langle f, J^{-1}\omega\rangle_{X^*,X}$$

als Abbildung von $(X^{**}, \tau(X^{**}, X^*))$ nach $\mathbb{R}$ stetig ist. Aber $\langle f, J^{-1}\omega\rangle_{X^*,X} = \langle \omega, f\rangle_{X^{**},X^*}$, wir betrachten also die Stetigkeit der Abbildung $\omega \mapsto \langle \omega, f\rangle_{X^{**},X^*}$. Sie ist aber schon stetig nach Konstruktion von $\tau(X^{**}, X^*)$, also ist B_X kompakt bezüglich $\tau(X, X^*)$. ■

Zum Beweis der Rückrichtung benötigen wir 2 Lemmata.

7.4 Lemma (Helly). *Sei X ein Banachraum und $f_1, \dots, f_n \in X^*$ und $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ beliebig, aber fest. Dann sind äquivalent:*

(i) *Für alle $\varepsilon > 0$ gibt es ein $x_\varepsilon \in X$, so dass $\|x_\varepsilon\| \le 1$ und für alle $i = 1, \dots, n$ gilt:*
$$|\langle f_i, x_\varepsilon\rangle - \alpha_i| < \varepsilon,$$

(ii) *Für alle $\beta_1, \dots, \beta_n \in \mathbb{R}$ gilt*
$$\Big|\sum_{i=1}^n \alpha_i\beta_i\Big| \le \Big\|\sum_{i=1}^n \beta_i f_i\Big\|_{X^*}.$$

Beweis : (i) $\Rightarrow$ (ii) Für $\beta_1, \dots, \beta_n \in \mathbb{R}$ beliebig, aber fest, setzen wir $S := \sum\limits_{i=1}^n |\beta_i|$. Aus (i) folgt
$$\Big|\sum_{i=1}^n \beta_i\langle f_i, x_\varepsilon\rangle - \sum_{i=1}^n \alpha_i\beta_i\Big| \le S\varepsilon,$$
und somit
$$\begin{aligned}\Big|\sum_{i=1}^n \alpha_i\beta_i\Big| &\le \Big|\sum_{i=1}^n \beta_i\langle f_i, x_\varepsilon\rangle\Big| + S\varepsilon\\ &\le \Big\|\sum_{i=1}^n \beta_i f_i\Big\|_{X^*}\|x_\varepsilon\|_X + S\varepsilon\end{aligned}$$
Da $\|x_\varepsilon\|_X \le 1$ und $\varepsilon > 0$ beliebig folgt (ii).

(ii) $\Rightarrow$ (i) Sei $\alpha := (\alpha_1, \dots, \alpha_n)^\top \in \mathbb{R}^n$ und
$$\varphi : X \to \mathbb{R}^n : x \mapsto (\langle f_1, x\rangle, \dots, \langle f_n, x\rangle)^\top.$$
Aussage (i) ist äquivalent zu $\alpha \in \overline{\varphi(B_X)}$. Dies zeigen wir durch einen Widerspruchsbeweis. Sei also $\alpha \notin \overline{\varphi(B_X)}$. Da $\{\alpha\}$ kompakt ist und $\overline{\varphi(B_X)}$ abgeschlossen und konvex ist, folgt mit dem Satz von Hahn-Banach, dass es ein $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_n)^\top \in \mathbb{R}^n$ und ein $\gamma \in \mathbb{R}$ gibt, so dass
$$\sum_{i=1}^n \beta_i\langle f_i, x\rangle < \gamma < \sum_{i=1}^n \alpha_i\beta_i \qquad \forall\, x \in B_X.$$
Da auch $-x \in B_X$ ist, folgt
$$\Big|\Big\langle \sum_{i=1}^n \beta_i f_i, x\Big\rangle\Big| = \Big|\sum_{i=1}^n \beta_i\langle f_i, x\rangle\Big| < \gamma < \sum_{i=1}^n \alpha_i\beta_i.$$

Wir bilden das Supremum über $x \in B_X$ und erhalten:

$$\Big\| \sum_{i=1}^n \beta_i f_i \Big\|_{X^*} \le \gamma < \sum_{i=1}^n \alpha_i \beta_i .$$

Dies ist ein Widerspruch zu (ii). ■

7.5 Lemma (Goldstine). *Sei X ein Banachraum. Dann ist $J(B_X)$ dicht in $B_{X^{**}}$ bezüglich der $*$-schwachen Topologie $\tau(X^{**}, X^*)$.*

Beweis : Sei $\omega \in B_{X^{**}}$ und V Umgebung von ω bezüglich $\tau(X^{**}, X^*)$. Wir müssen zeigen, dass $V \cap J(B_X) \neq \emptyset$. OBdA sei

$$V = \{\eta \in X^{**} \,\big|\, |\langle \eta - \omega, f_i\rangle| < \varepsilon,\ i = 1, \ldots, n\},$$

mit $\varepsilon > 0$, $f_i \in X^*$. Wir müssen also zeigen, dass es ein $x \in B_X$ gibt mit

$$|\langle Jx, f_i\rangle_{X^{**},X^*} - \langle \omega, f_i\rangle| = |\langle f_i, x\rangle_{X^*,X} - \langle \omega, f_i\rangle| < \varepsilon\,, \tag{7.6}$$

für $i = 1, \ldots, n$. Sei $\alpha_i := \langle \omega, f_i\rangle$ und $\beta_1, \ldots, \beta_n$ fest, aber beliebig. Dann ist

$$\Big| \sum_{i=1}^n \alpha_i \beta_i \Big| = \Big| \sum_{i=1}^n \beta_i \langle \omega, f_i\rangle \Big| \le \|\omega\|_{X^{**}} \Big\| \sum_{i=1}^n \beta_i f_i \Big\|_{X^*} .$$

Das ist Bedingung (ii) aus Lemma 7.4. Aus Lemma 7.4 (i) folgt also, dass ein $x_\varepsilon \in B_X$ existiert, so dass für alle $i = 1, \ldots, n$ gilt

$$|\langle f_i, x_\varepsilon\rangle - \alpha_i| < \varepsilon\,,$$

und nach der Definition von α_i folgt (7.6) und somit die Behauptung. ■

Beweis (Satz 7.2, "$\Leftarrow$"): Sei B_X kompakt bezüglich der schwachen Topologie $\tau(X, X^*)$. Wir wissen, dass $J : X \to X^{**}$ stetig bezüglich den starken Topologien ist und mit Satz 5.17 folgt

$$J : (X, \tau(X, X^*)) \to (X^{**}, \tau(X^{**}, X^{***}))\,,$$

ist stetig. Da $\tau(X^{**}, X^*)$ gröber ist als $\tau(X^{**}, X^{***})$ folgt, dass

$$J : (X, \tau(X, X^*)) \to (X^{**}, \tau(X^{**}, X^*))$$

stetig ist. Also ist $J(B_X)$ kompakt bezüglich $\tau(X^{**}, X^*)$. Allgemein gilt, dass jede kompakte Menge abgeschlossen ist und da wegen Lemma 7.5 $J(B_X)$ dicht in $B_{X^{**}}$ bezüglich $\tau(X^{**}, X^*)$ ist, folgt

$$J(B_X) = B_{X^{**}}\,.$$

Nach Skalierung erhält man $J(X) = X^{**}$. ■

7.7 Lemma. *Sei X ein Banachraum und $W \subset X$ ein abgeschlossener linearer Unterraum. Dann sind die beiden schwachen Topologien $\tau(W, W^*)$ und $\tau(X, X^*)\big|_W$ identisch.*

BEWEIS : „$\supseteq$" Sei $x \in W$ und sei V eine Umgebung von x bzgl. $\tau(X, X^*)\big|_W$. OBdA können wir annehmen, dass es $f_i \in X^*$ und $\varepsilon > 0$ gibt, so dass

$$\begin{aligned} V &= \big\{y \in X \,\big|\, |\langle f_i, x - y\rangle| < \varepsilon\big\} \cap W \\ &= \big\{y \in W \,\big|\, |\langle f_i\big|_W, x - y\rangle| < \varepsilon\big\} . \end{aligned}$$

Da $f_i\big|_W \in W^*$ folgt aus Lemma 5.7, dass V eine Umgebung von x bezüglich $\tau(W, W^*)$ ist.

„$\subseteq$" Sei $x \in W$ und sei V eine Umgebung von x bzgl. $\tau(W, W^*)$. OBdA können wir annehmen, dass es $f_i \in W^*$ und $\varepsilon > 0$ gibt, so dass

$$V = \big\{y \in W \,\big|\, |\langle f_i, x - y\rangle| < \varepsilon\big\} .$$

Aus dem Satz von Hahn–Banach folgern, dass es Fortsezungen $\tilde{f}_i \in X^*$ von $f_i \in W^*$ gibt. Also ergibt sich

$$V = \big\{y \in X \,\big|\, |\langle \tilde{f}_i, x - y\rangle| < \varepsilon\big\} \cap W ,$$

d.h. V ist Umgebung von x bezüglich $\tau(X, X^*)\big|_W$. ∎

7.8 Lemma. *Seien X und Y Banachräume.*

(i) *Jeder abgeschlossene lineare Unterraum W von X ist reflexiv, falls X reflexiv ist.*

(ii) *Sei $A : X \to Y$ ein Isomorphismus, d.h. A und A^{-1} sind linear, stetig, bijektiv. Dann ist X reflexiv genau dann, wenn Y reflexiv ist.*

(iii) *X ist reflexiv genau dann, wenn X^* reflexiv ist.*

BEWEIS : (i) Da X reflexiv ist, folgt aus Satz 7.2, dass B_X kompakt bzgl. der schwachen Topologie $\tau(X, X^*)$ ist. Da W stark abgeschlossen und konvex ist, folgt aus Satz 5.13, dass W auch schwach abgeschlossen ist. Somit ist $B_W = B_X \cap W \subseteq W$ kompakt bzgl. $\tau(X, X^*)$. Lemma 7.7 liefert aber $\tau(X, X^*)\big|_W = \tau(W, W^*)$, d.h. B_W ist kompakt bezüglich $\tau(W, W^*)$. Aus Satz 7.2 folgt also, dass W reflexiv ist.

(ii) Es reicht zu zeigen:

$$X \text{ reflexiv} \Rightarrow Y \text{ reflexiv} ,$$

denn die umgekehrte Richtung folgt daraus sofort, da die Inverse auch ein Isomorphismus ist. Sei also X reflexiv und $A\colon X \to Y$ ein Isomorphismus. Insbesondere ist A stetig bzgl. der starken Topologien, woraus mit Satz 5.17 folgt, dass A auch stetig bzgl. der schwachen Topologien ist. Aufgrund von Satz 7.2 reicht es zu zeigen, dass B_Y kompakt bzgl. der schwachen Topologie $\tau(Y, Y^*)$ ist. Da A surjektiv und linear ist, erhalten wir $B_Y \subseteq A(B_X^r)$ mit $r = \|A^{-1}\|$. Folgerung 7.3 liefert, dass B_X^r kompakt bzgl. $\tau(X, X^*)$ ist. Da A stetig bzgl. der schwachen Topologien ist, erhalten wir also, dass $A(B_X^r)$ kompakt bzgl. $\tau(Y, Y^*)$ ist. Weiterhin ist B_Y stark abgeschlossen und konvex und somit auch schwach abgeschlossen (Satz 5.13). Also ist B_Y eine schwach abgeschlossene Teilmenge einer schwach kompakten Menge und somit selbst schwach kompakt (Kapitel 1.2, Lemma 3.15).

(iii) Nach Satz 6.10 ist B_{X^*} kompakt bezüglich der $*$-schwachen Topologie $\tau(X^*, X)$. Da X reflexiv ist, ist $\tau(X^*, X) = \tau(X^*, X^{**})$, d.h. B_{X^*} ist auch kompakt bezüglich $\tau(X^*, X^{**})$ und dann folgt mit Satz 7.2, dass X^* reflexiv ist.

Sei umgekehrt X^* reflexiv. Nach dem gerade gezeigten ist X^{**} reflexiv. Da $J_X(X)$ ein abgeschlossener, linearer Unterraum von X^{**} ist, ist nach (i) $J_X(X)$ reflexiv und nach (ii) ist also X reflexiv. ∎

7.9 Folgerung. *Sei X ein reflexiver Banachraum und K eine konvexe, abgeschlossene, beschränkte Teilmenge. Dann ist K kompakt bezüglich der schwachen Topologie $\tau(X, X^*)$.*

Beweis : Da K konvex und abgeschlossen ist, folgt mit Satz 5.13, dass K abgeschlossen ist bzgl. $\tau(X, X^*)$ und da K beschränkt ist, gibt es ein r, so dass $K \subseteq B_X^r$. Nach Folgerung 7.3 ist B_X^r kompakt bzgl. $\tau(X, X^*)$. Somit folgt mit Lemma 3.15 aus Kapitel 1.2, dass K kompakt ist bzgl. $\tau(X, X^*)$. ∎

• Wir wollen nun untersuchen, ob B_X auch folgenkompakt ist. Dazu benötigen wir einige Resultate für separable Räume.

7.10 Satz. *Sei (M, d) ein separabler, metrischer Raum und $A \subseteq M$ eine Teilmenge. Dann ist auch A separabel.*

Beweis : Da M separabel ist, gibt es eine Folge (x_n), die dicht in M liegt. Sei $(r_n) \subseteq \mathbb{R}_{\geq 0}$ mit $r_n \searrow 0$. Wähle $a_{n,m} \in A \cap B_{r_m}(x_n)$, falls $A \cap B_{r_m}(x_n) \neq \emptyset$. $(a_{n,m})_{n,m \in \mathbb{N}}$ ist abzählbar. Sei $a \in A$. Dann gibt es für alle $\varepsilon > 0$ ein ein $m \in \mathbb{N}$ mit $r_m < \frac{\varepsilon}{2}$ und ein x_n so, dass $d(a, x_n) < r_m$. Da dann $A \cap B_{r_m}(x_n) \neq \emptyset$ ist, gilt für $a_{n,m}$

$$d(a, a_{n,m}) \leq d(a, x_n) + d(x_n, a_{n,m}) \leq r_m + r_m < \varepsilon\,.$$

∎

7.11 Satz. *Sei X ein Banachraum so, dass X^* separabel ist. Dann ist auch X separabel.*

Beweis : Da X^* separabel ist, gibt es eine Folge (f_n), die dicht in X^* liegt. Weiterhin gilt:

$$\|f_n\|_{X^*} = \sup_{\|x\|_X \le 1} |\langle f_n, x\rangle| = \sup_{\|x\|_X = 1} |\langle f_n, x\rangle| \,. \tag{7.12}$$

Die letzte Gleichheit gilt aufgrund folgender Überlegungen: $\sup\limits_{\|x\|_X=1} |\langle f_n, x\rangle| \le \sup\limits_{\|x\|_X \le 1} |\langle f_n, x\rangle|$, da $\{\|x\| = 1\} \subseteq \{\|x\| \le 1\}$. Die umgekehrte Ungleichung folgt, da für $x \neq 0$ gilt: $\langle f_n, x\frac{\|x\|}{\|x\|}\rangle = \|x\|\langle f_n, \frac{x}{\|x\|}\rangle \le \langle f_n, \frac{x}{\|x\|}\rangle$.
Aufgrund von (7.12) gibt es also (x_n) mit $\|x_n\| = 1$, so dass $\langle f_n, x_n\rangle \ge \frac{1}{2}\|f_n\|$. Sei L_0 der Vektorraum über $\mathbb{Q}$ generiert durch $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, d.h.

$$L_0 := \{x \in X \,\big|\, x = \sum_{n=1}^{N} q_n x_n,\ q_n \in \mathbb{Q}\} \,.$$

L_0 ist abzählbar, da $L_0 = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} \Lambda_n$ und $\Lambda_n = \operatorname{span}_{\mathbb{Q}}\{x_1, \ldots, x_n\}$ isomorph zu $\mathbb{Q}^n$ ist . Sei L der Vektorraum über $\mathbb{R}$ generiert durch $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Dann gilt:

$$L_0 \subseteq L \qquad \text{und} \qquad L_0 \,\text{ist dicht in}\, L \,.$$

In der Tat, sei $x = \sum\limits_{n=1}^{N} \alpha_n x_n \in L$, dann gibt es zu $\varepsilon > 0$ ein $q_n \in \mathbb{Q}$ so, dass $|q_n - \alpha_n| \le \frac{\varepsilon}{N}$ und dann ist

$$\|x - \sum_{n=1}^{N} q_n x_n\| = \|\sum_{n=1}^{N} \alpha_n x_n - \sum_{n=1}^{N} q_n x_n\| \le \varepsilon \,.$$

Wenn wir zeigen, dass L dicht in X ist, ist die Behauptung bewiesen, denn dann ist $L_0 \subseteq L \subseteq X$ jeweils dicht, d.h. $\overline{L_0} = \overline{L} = X$. Sei $f \in X^*$ mit $\langle f, x\rangle = 0$ für alle $x \in L$. Wir wollen zeigen, dass dann schon $f = 0$ ist, denn dann folgt mit Folgerung 2.12, dass $\overline{L} = X$ ist. Zu $\varepsilon > 0$ gibt es ein f_n so, dass $\|f - f_n\|_{X^*} < \varepsilon$. Wir erhalten also

$$\frac{1}{2}\|f_n\|_{X^*} \le \langle f_n, x_n\rangle = \langle f_n - f, x_n\rangle \le \varepsilon \,,$$

da $\|x_n\| = 1$. Die Dreiecksungleichung liefert also

$$\|f\|_{X^*} \le \|f - f_n\|_{X^*} + \|f_n\|_{X^*} < \varepsilon + 2\varepsilon = 3\varepsilon \,,$$

und da ε beliebig war, folgt $f = 0$, d.h. die Behauptung. ∎

7.13 Folgerung. *Sei X ein Banachraum. Dann ist X separabel und reflexiv genau dann, wenn X^* separabel und reflexiv ist.*

Beweis : „$\Leftarrow$“: Wenn X^* separabel ist, folgt mit Satz 7.11, dass X separabel ist und wenn X^* reflexiv ist, ist nach Lemma 7.8 (iii) X reflexiv.
„$\Rightarrow$“: Nach Lemma 7.8 (iii) ist X reflexiv genau dann, wenn X^* reflexiv ist. Wenn X reflexiv ist, ist außerdem $J : X \to J(X) = X^{**}$ eine lineare Isometrie, wenn also (x_n) eine dichte Folge in X ist, ist auch $(J(x_n))$ dicht in X^{**}, d.h. X^{**} ist separabel. Dann folgt, dass X^* separabel und reflexiv ist.

■

7.14 Satz. *Sei X ein separabler Banachraum. Dann ist B_{X^*} bezüglich der $*$-schwachen Topologie $\tau(X^*, X)$ metrisierbar, d.h. es existiert auf B_{X^*} eine Metrik d so, dass die durch sie generierte Topologie auf B_{X^*} mit $\tau(X^*, X)$ eingeschränkt auf B_{X^*} übereinstimmt.*

Beweis : Da X separabel ist, gibt es eine Folge $(x_n) \subseteq B_X$, die dicht in B_X liegt. Für f, $g \in B_{X^*}$ definieren wir die Metrik

$$d(f, g) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} |\langle f - g, x_n \rangle|$$

und betrachten die dadurch generierte Topologie.
(i) Für $f_0 \in B_{X^*}$ sei V Umgebung von f_0 bezüglich $\tau(X^*, X)$. Wir wollen zeigen, dass es ein $r > 0$ gibt, so dass

$$U := \{f \in B_{X^*} \,|\, d(f, f_0) < r\} \subseteq V.$$

OBdA können wir annehmen, dass für $\varepsilon > 0$, $y_i \in X$, V die Form hat

$$V = \{f \in B_{X^*} \,|\, |\langle f - f_0, y_i \rangle| < \varepsilon,\ i = 1, \ldots, k\}.$$

Da $\frac{y_i}{\|y_i\|} \in B_X$, gibt es also einen Index n_i, so dass

$$\Big\| \frac{y_i}{\|y_i\|} - x_{n_i} \Big\| < \frac{\varepsilon}{4} \frac{1}{\|y_i\|}.$$

Wähle $r > 0$ so, dass für alle $i = 1, \ldots, k$ gilt

$$2^{n_i} r < \frac{\varepsilon}{2\|y_i\|}.$$

Sei $f \in U$, d.h. $d(f, f_0) < r$, dann ist auch $\frac{1}{2^{n_i}}|\langle f - f_0, x_{n_i}\rangle| < r$ für alle $i = 1, \ldots, k$ und somit:

$$\begin{aligned}
|\langle f - f_0, y_i\rangle| &= \|y_i\| |\langle f - f_0, \frac{y_i}{\|y_i\|}\rangle| \\
&\leq \|y_i\| (\langle f - f_0, \frac{y_i}{\|y_i\|} - x_{n_i}\rangle| + |\langle f - f_0, x_{n_i}\rangle|) \\
&\leq \|y_i\| (\|f\| + \|f_0\|) \Big\| \frac{y_i}{\|y_i\|} - x_{n_i} \Big\| + \|y_i\| r 2^{n_i} \\
&\leq 2 \frac{\|y_i\|}{\|y_i\|} \frac{\varepsilon}{4} + \|y_i\| \frac{\varepsilon}{2\|y_i\|} \\
&= \varepsilon
\end{aligned}$$

(ii) Sei $f_0 \in B_{X^*}$, $r > 0$ fest, beliebig. Wir müssen zeigen, dass es eine Umgebung V bezüglich $\tau(X^*, X)$ gibt mit $V \subseteq B_r^d(f_0) = \{f \in B_{X^*} \,\big|\, d(f, f_0) < r\}$ $=: U$. Sei

$$V = \{f \in B_{X^*} \,\big|\, |\langle f - f_0, x_i\rangle| < \varepsilon,\ i = 1, \ldots, k\}.$$

Zu wählen ist $\varepsilon > 0$, $k \in \mathbb{N}$. Für $f \in V$ ist

$$\begin{aligned}
d(f, f_0) &= \sum_{n=1}^{k} \frac{1}{2^n} |\langle f - f_0, x_n\rangle| + \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{1}{2^n} |\langle f - f_0, x_n\rangle| \\
&\leq \varepsilon + 2 \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \varepsilon + \frac{1}{2^{k-1}} \\
&\leq \frac{r}{2} + \frac{r}{2} = r,
\end{aligned}$$

wenn wir $\varepsilon < \frac{r}{2}$ und $\frac{1}{2^{k-1}} < \frac{r}{2}$ wählen. ■

• Die Umkehrung von Satz 7.14 gilt: Wenn B_{X^*} bezüglich $\tau(X^*, X)$ metrisierbar ist, so ist X separabel.

7.15 Satz. *Sei X ein Banachraum so, dass X^* separabel ist. Dann ist B_X metrisierbar bezüglich der schwachen Topologie $\tau(X, X^*)$.*

Beweis : Wortwörtlich wie der Beweis von Satz 7.14, vertausche die Rolle von X und X^*. ■

7.16 Folgerung. *Sei X ein separabler Banachraum und sei $(f_n) \subseteq X^*$ beschränkt. Dann existiert eine Teilfolge $(f_{n_k}) \subseteq (f_n)$, die bezüglich der $*$-schwachen Topologie konvergiert.*

Beweis : OBdA sei $\|f_n\|_{X^*} \leq 1$. Nach Satz 6.10 ist B_{X^*} kompakt bezüglich $\tau(X^*, X)$ und nach Satz 7.14 ist B_{X^*} metrisierbar bezüglich $\tau(X^*, X)$, aber nach Kapitel 1 Satz 3.17 sind kompakt und folgenkompakt äquivalent. ■

7.17 Satz. *Sei X ein reflexiver Banachraum und $(x_n) \subseteq X$ eine beschränkte Folge. Dann existiert eine Teilfolge $(x_{n_k}) \subseteq (x_n)$ die bezüglich der schwachen Topologie konvergiert.*

Beweis : OBdA sei $\|x_n\| \le 1$. Sei M_0 der Vektorraum über $\mathbb{R}$, der durch (x_n) generiert wird. Setze $M = \overline{M_0}$. Analog zu Satz 7.11 sieht man, dass M separabel ist. Außerdem ist M ein abgeschlossener, linearer Unterraum von X, also ist nach Lemma 7.8 (i) M reflexiv und wegen Satz 7.2 ist die Einheitskugel $B_M = \{x \in M \,\big|\, \|x\| \le 1\}$ kompakt bezüglich $\tau(M, M^*)$.
Da M separabel ist, ist nach Folgerung 7.13 auch M^* separabel und somit ist nach Satz 7.15 B_M metrisierbar bezüglich der schwachen Topologie $\tau(M, M^*)$. Nach Kapitel 1 Satz 3.17 ist eine Menge eines metrischen Raumes kompakt genau dann, wenn sie folgenkompakt ist, also gibt es eine Teilfolge $(x_{n_k}) \subseteq (x_n)$, die bezüglich $\tau(M, M^*)$ konvergiert, d.h. für alle $f \in M^*$ gilt:

$$\langle f, x_{n_k}\rangle \to \langle f, x\rangle.$$

Aber (x_{n_k}) konvergiert auch bezüglich $\tau(X, X^*)$, denn für alle $f \in X^*$ ist $f|_M \in M^*$ und da $(x_{n_k}) \subseteq M$ erhalten wir

$$\langle f, x_{n_k}\rangle = \langle f|_M, x_{n_k}\rangle \to \langle f|_M, x\rangle = \langle f, x\rangle.$$

■

• Es gilt die Umkehrung von Satz 7.17: Sei X ein Banachraum so, dass alle beschränkten Folgen eine schwach konvergente Teilfolge besitzen. Dann ist X reflexiv.

7.18 Lemma. *Sei C eine abgeschlossene, konvexe Menge eines reflexiven Banachraumes X. Das Funktional $f\colon C \to (-\infty, \infty]$ sei konvex, unterhalbstetig und koerziv, d.h. $f(u) \to \infty$ für $\|u\| \to \infty$, $u \in C$. Dann besitzt f auf C ein Minimum. Die Begriffe „abgeschlossen“ und „unterhalbstetig“ sind bezüglich der starken Topologie gemeint.*

Beweis : O.B.d.A. können wir annehmen, dass f nichttrivial ist, d.h. $f \not\equiv \infty$. Sei $(u_n) \subset C$ eine Minimalfolge von f, d.h.

$$f(u_n) \to \inf_{v \in C} f(v) \qquad (n \to \infty)\,.$$

Aufgrund der Koerzivität von f muss die Folge (u_n) beschränkt sein. Also gibt es nach Satz 7.17 eine schwach konvergente Teilfolge (u_{n_k}) mit $u_{n_k} \rightharpoonup u_0$ $(k \to \infty)$. Aus Satz 5.13 und Kapitel 1 Lemma 3.8 folgt dann $u_0 \in C$. Sei nun $\varepsilon > 0$ fest, aber beliebig, und sei k_0 derart, dass für alle $k \ge k_0$ gilt:

$$f(u_{n_k}) < \inf_{v \in C} f(v) + \varepsilon\,. \tag{7.19}$$

Da auch die Folge $(u_{n_k})_{k\geq k_0}$ schwach gegen u_0 konvergiert, gibt es, aufgrund von Folgerung 5.14, eine Folge $(v_j) \subset C$ von konvexen Linearkombinationen der $(u_{n_k})_{k\geq k_0}$, die stark gegen u_0 konvergieren, d.h. $v_j = \sum_{k=k_0}^{N_j} c_k^j u_{n_k}$, $0 \leq c_k^j \leq 1$, $\sum\limits_{k=k_0}^{N_j} c_k^j = 1$ und $v_j \to u_0$, $j \to \infty$. Wegen der Konvexität des Funktionals f und (7.19) folgt

$$f(v_j) \leq \sum_{k=k_0}^{N_j} c_k^j \, f(u_{n_k}) \leq \sum_{k=k_0}^{N_j} c_k^j \left(\inf_{v\in C} f(v) + \varepsilon \right) = \inf_{v\in C} f(v) + \varepsilon \,. \tag{7.20}$$

In Banachräumen ist die Unterhalbstetigkeit äquivalent zur Bedingung:

$$\text{Für } x_n \to x_0 \text{ gilt: } f(x_0) \leq \liminf_{x_n\to x_0} f(x_n)\,.$$

Beweis hiervon:
"$\Rightarrow$": f ist unterhalbstetig $\Leftrightarrow$ $\{f \leq \lambda_0\}$ abgeschlossen $\Leftrightarrow$ $\{f > \lambda_0\}$ offen. Sei $x_n \to x_0$ und $f(x_0) > \liminf f(x_n) =: \lambda_0$, dann gibt es ein $\varepsilon_0 > 0$ mit $x_0 \in \{f > \lambda_0 + \varepsilon_0\}$ offen. Also gibt es ein $r > 0$ mit $B_r(x_0) \subseteq \{f > \lambda_0 + \varepsilon_0\}$. Weiterhin gibt es ein n_0, so dass für alle $n \geq n_0$ gilt $x_n \in \{f > \lambda_0 + \varepsilon_0\}$, d.h. $f(x_n) > \lambda_0 + \varepsilon_0$, ein Widerspruch zur Definition von $\lambda_0 = \liminf\limits_{n\to\infty} f(x_n)$.
"$\Leftarrow$": Sei $\{f \leq \lambda_0\}$ nicht abgeschlossen, dann gibt es eine Folge (x_n), $x_n \to x_0$, $x_n \in \{f \leq \lambda_0\}$ und $f(x_0) > \lambda_0$. Dann ist $\lambda_0 < f(x_0) \leq \liminf\limits_{n\to\infty} f(x_n) \leq \lambda_0$, ein Widerspruch.
Aber $v_j \to u_0$, also erhalten wir aus (7.20)

$$f(u_0) \leq \liminf_{j\to\infty} f(v_j) \leq \inf_{v\in C} f(v) + \varepsilon\,.$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig war, ergibt sich $f(u_0) = \inf\limits_{C} f$, d.h. das Minimum wird angenommen. ∎

7.21 Definition. *Ein Banachraum heißt* ***gleichmäßig konvex*** *genau dann, wenn für alle $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert so, dass für alle $x, y \in B_X$, d.h. $\|x\| \leq 1$, $\|y\| \leq 1$, mit $\|x - y\| > \varepsilon$ folgt $\|\frac{x+y}{2}\| < 1 - \delta$.*

- X ist gleichmäßig konvex $\Rightarrow$ B_X ist "rund"

Beispiele - $\mathbb{R}^2$ mit der euklidischen Metrik, dann kann man ε und δ explizit berechnen.
- $\mathbb{R}^2$ mit der Norm $\|x\| := |x_1| + |x_2|$ ist nicht gleichmäßig konvex.
- $L^p(\Omega)$, $1 < p < \infty$ ist gleichmäßig konvex,
- L^1, L^∞, $C(\overline{\Omega})$ nicht.

7.22 Satz (Milman-Pettis). *Jeder gleichmäßig konvexe Banachraum ist reflexiv.*

BEWEIS : Sei $\omega \in X^{**}$ mit $\|\omega\| = 1$. Zu zeigen ist, dass $\omega \in J(B_X)$ ist, dann folgt durch Skalieren die Behauptung. $J(B_X)$ ist abgeschlossen. In der Tat, sei $(\omega_n) \subseteq J(B_X)$ eine Folge mit $\omega_n \to \omega$ in X^{**}. Es gibt eine Folge $(x_n) \subseteq B_X$ mit $\omega_n = J(x_n)$, dann gilt:

$$\|x_n - x_m\| = \|J(x_n) - J(x_m)\| = \|\omega_n - \omega_m\|,$$

und da (ω_n) eine Cauchyfolge ist, ist es auch (x_n), es gibt also ein $x \in B_X$: $x_n \to x$. Dann gilt auch

$$\omega_n = J(x_n) \to J(x),$$

d.h. $\omega \in J(B_X)$. Es reicht also zu zeigen, dass es für alle $\varepsilon > 0$ ein $x \in B_X$ gibt mit

$$\|\omega - J(x)\| \leq \varepsilon.$$

Sei also $\varepsilon > 0$, dann gibt es ein δ aus Definition 7.21. Sei $f \in X^*$, $\|f\| \leq 1$ und

$$\langle \omega, f \rangle > 1 - \frac{\delta}{2}. \tag{7.23}$$

Diese Wahl ist möglich, da $1 = \|\omega\|_{X^{**}} = \sup\limits_{\|f\|_{X^*} \leq 1} \langle \omega, f \rangle$. Setze

$$V := \left\{ \eta \in X^{**} \,\middle|\, |\langle \eta - \omega, f \rangle| < \frac{\delta}{2} \right\}.$$

Dies ist eine Umgebung von ω bezüglich $\tau(X^{**}, X^*)$. Nach Lemma 7.5 ist $J(B_X)$ dicht in $B_{X^{**}}$ bzgl. $\tau(X^{**}, X^*)$, also ist $J(B_X) \cap V \neq \emptyset$. Sei $x \in B_X$ mit $J(x) \in V$. Wir zeigen durch einen Widerspruch:

$$\omega \in J(x) + \varepsilon B_{X^{**}}.$$

Sei also $\omega \in X^{**} \setminus (J(x) + \varepsilon B_{X^{**}}) =: W$. Da $B_{X^{**}}$ kompakt bzgl. $\tau(X^{**}, X^*)$ ist, ist $B_{X^{**}}$ auch abgeschlossen bzgl. $\tau(X^{**}, X^*)$, d.h. W ist offen bezüglich $\tau(X^{**}, X^*)$ und somit ist W eine offene Umgebung von ω. Nach Lemma 7.5 ist $(V \cap W) \cap J(B_X) \neq \emptyset$, es gibt also ein $\hat{x} \in B_X$: $J(\hat{x}) \in V \cap W$. Aus $J(\hat{x}) \in V$ und $J(x) \in V$ folgt

$$|\langle f, x \rangle - \langle \omega, f \rangle| = |\langle J(x), f \rangle - \langle \omega, f \rangle| < \frac{\delta}{2}$$

und

$$|\langle f, \hat{x} \rangle - \langle \omega, f \rangle| < \frac{\delta}{2}.$$

Also gilt

$$2\langle\omega, f\rangle < \delta + \langle f, x+\hat{x}\rangle \overset{\|f\|\leq 1}{\leq} \delta + \|x+\hat{x}\|.$$

Mit (7.23) gilt dann

$$1 - \frac{\delta}{2} < \langle\omega, f\rangle < \frac{\delta}{2} + \left\|\frac{x+\hat{x}}{2}\right\|.$$

Da X gleichmäßig konvex ist, ist $\|x-\hat{x}\| \leq \varepsilon$, aber $J(\hat{x}) \in W$ und somit $\|x-\hat{x}\| = \|J(x) - J(\hat{x})\| > \varepsilon$, ein Widerspruch. ∎

7.24 Folgerung. *Ein Hilbertraum ist gleichmäßig konvex und somit reflexiv.*

Beweis : Seien $u, v \in H$ mit $\|u\|, \|v\| \leq 1$ und $\|u-v\| > \varepsilon$. Mit der Parallelogrammgleichung (1.3) aus Kapitel 2 folgt

$$\begin{aligned}\left\|\frac{u+v}{2}\right\|^2 &= 2\left\|\frac{u}{2}\right\|^2 + 2\left\|\frac{v}{2}\right\|^2 - \left\|\frac{u-v}{2}\right\|^2 \\ &\leq \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{\varepsilon^2}{4},\end{aligned}$$

H ist also gleichmäßig konvex und Satz 7.22 liefert, dass H reflexiv ist. ∎

7.25 Satz. *Sei X ein gleichmäßig konvexer Banachraum und sei $(x_n) \subseteq X$ eine Folge, die schwach gegen x konvergiert und*

$$\limsup_{n\to\infty} \|x_n\| \leq \|x\|$$

erfüllt. Dann konvergiert x_n stark gegen x.

Beweis : OBdA sei $x \neq 0$. Sei $\lambda_n := \max(\|x_n\|, \|x\|)$, dann ist sofort klar, dass $\lambda_n \to \|x\|$. Außerdem definieren wir

$$y_n := \frac{x_n}{\lambda_n}, \qquad y := \frac{x}{\|x\|}.$$

Aus $x_n \rightharpoonup x$ folgt, dass $y_n \rightharpoonup y$, denn für $f \in X^*$ gilt:

$$\begin{aligned}|\langle f, y_n\rangle - \langle f, y\rangle| &\leq |\langle f, \frac{x_n}{\lambda_n} - \frac{x_n}{\|x\|}\rangle| + |\langle f, \frac{x_n}{\|x\|} - \frac{x}{\|x\|}\rangle| \\ &\leq \|f\|_{X^*} \underbrace{\|x_n\|}_{\leq K} \underbrace{\left|\frac{1}{\lambda_n} - \frac{1}{\|x\|}\right|}_{\to 0} + \frac{1}{\|x\|} \underbrace{|\langle f, x_n - x\rangle|}_{\to 0} \to 0.\end{aligned}$$

Wir wissen, dass $\|y\| \leq \liminf\limits_{n\to\infty} \|\frac{y_n+y}{2}\|$, aber da $\|y\| = 1$ und $\|y_n\| \leq 1$ folgt

$$1 \leq \liminf_{n\to\infty} \|\frac{y_n+y}{2}\| \leq \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{2}(\|y_n\| + \|y\|) = 1.$$

Somit folgt $\|\frac{y_n+y}{2}\| \to 1$ und da X gleichmäßig konvex ist, folgt $y_n - y \to 0$, also auch $x_n \to x$. ∎

3.8 Die Lebesgueräume

In diesem Abschnitt wollen wir grundlegende Eigenschaften der Lebesgueräume beweisen.

8.1 Satz. *Sei $1 < p < \infty$. Dann ist $L^p(\Omega)$ gleichmäßig konvex und somit reflexiv.*

Beweis : Seien $u, v \in L^p(\Omega)$ mit $\|u\|_p, \|v\|_p \leq 1$ und $\|u - v\|_p > \varepsilon^{\frac{1}{p}}$. Sei

$$\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{\geq 0} : s \mapsto |s|^p,$$

Für alle $\varepsilon \in (0,1)$ gibt es ein $\delta > 0$, so dass für alle $a, b \in \mathbb{R}$ mit $|a - b| \geq \left(\frac{\varepsilon}{2^{p+1}}\right)^{\frac{1}{p}} \max(|a|, |b|)$ gilt:

$$\varphi\Big(\frac{a+b}{2}\Big) \leq \frac{1-\delta}{2}\big(\varphi(a) + \varphi(b)\big). \tag{8.2}$$

Der Beweis dieser Aussage folgt im nächsten Lemma. Setze nun

$$A := \{x \in \Omega \,\big|\, |u(x) - v(x)| \geq \big(\frac{\varepsilon}{2^{p+1}}\big)^{\frac{1}{p}} \max(|u(x)|, |v(x)|)\},$$

dann folgt aus (8.2), dass für alle $x \in A$ gilt:

$$\varphi\Big(\frac{u(x)+v(x)}{2}\Big) \leq \frac{1-\delta}{2}\big(\varphi(u(x)) + \varphi(v(x))\big). \tag{8.3}$$

Weiterhin gilt

$$\begin{aligned} 1 - \int\limits_\Omega \varphi\Big(\frac{u+v}{2}\Big)dx &\geq \frac{1}{2}\int\limits_\Omega \varphi(u) + \varphi(v)dx - \int\limits_\Omega \varphi\Big(\frac{u+v}{2}\Big)dx \\ &\geq \frac{1}{2}\int\limits_A \varphi(u) + \varphi(v)dx - \int\limits_A \varphi\Big(\frac{u+v}{2}\Big)dx \\ &\overset{(8.3)}{\geq} \frac{1}{2}\int\limits_A \varphi(u) + \varphi(v)dx - \frac{1-\delta}{2}\int\limits_A \varphi(u) + \varphi(v)dx \\ &= \frac{\delta}{2}\int\limits_A \varphi(u) + \varphi(v)dx, \end{aligned}$$

wobei wir $\|u\|_p, \|v\|_p \leq 1$; die Zerlegung $\Omega = (\Omega \setminus A) \cup A$ und die Konvexität von φ auf $\Omega \setminus A$ benutzt haben. Insgesamt erhalten wir also

$$1 - \int\limits_\Omega \varphi\left(\frac{u+v}{2}\right)dx \geq \frac{\delta}{2}\int\limits_A \varphi(u) + \varphi(v)dx. \tag{8.4}$$

Für $x \in \Omega \setminus A$ ist $|u(x) - v(x)| < \big(\frac{\varepsilon}{2^{p+1}}\big)^{\frac{1}{p}}(|u(x)| + |v(x)|)$, also $\varphi(u-v) < \varphi\big(\big(\frac{\varepsilon}{2^{p+1}}\big)^{\frac{1}{p}}(|u| + |v|)\big) \le \frac{\varepsilon}{2^{p+1}}\varphi(|u| + |v|)$, da $\varphi(s) = |s|^p$. Wenn wir nun das Integral über $\Omega \setminus A$ bilden, erhalten wir:

$$\begin{aligned}\int\limits_{\Omega\setminus A} \varphi(u-v)dx &< \frac{\varepsilon}{2^{p+1}} \int\limits_{\Omega\setminus A} \varphi(|u| + |v|)\, dx \\ &\le \frac{\varepsilon}{2^{p+1}} 2^{p-1} \int\limits_{\Omega\setminus A} \varphi(u) + \varphi(v)\, dx \qquad (8.5) \\ &< \frac{\varepsilon}{2},\end{aligned}$$

da $\varphi(|u|+|v|) = \varphi(\frac{1}{2}(2\,|u|+2\,|v|)) \le \frac{1}{2}(\varphi(2\,|u|)+\varphi(2\,|v|)) = 2^{p-1}(\varphi(u)+(\varphi(v))$ und $\|u\|_p, \|v\|_p \le 1$. Also Aus (8.5) folgt

$$\begin{aligned}\int\limits_{A} \varphi(u-v)dx &= \int\limits_{\Omega} \varphi(u-v)dx - \int\limits_{\Omega\setminus A} \varphi(u-v)dx \\ &\overset{(8.5)}{>} \int\limits_{\Omega} \varphi(u-v)dx - \frac{\varepsilon}{2} \\ &> \frac{\varepsilon}{2}\end{aligned}$$

aufgrund von $\|u-v\|_p > \varepsilon^{\frac{1}{p}}$. Also gilt

$$\begin{aligned}\frac{\varepsilon}{2} < \int\limits_{A} \varphi(u-v)dx &\le 2^{p-1} \int\limits_{A} \varphi(u) + \varphi(v)dx \\ &\overset{(8.4)}{\le} 2^{p-1}\frac{2}{\delta}\Big(1 - \int\limits_{\Omega} \varphi\Big(\frac{u+v}{2}\Big)\Big)dx\end{aligned}$$

d.h.

$$\begin{aligned}\frac{\varepsilon}{2} < \frac{2^p}{\delta}\Big(1 - \Big\|\frac{u+v}{2}\Big\|_p^p\Big) \quad &\Longleftrightarrow \quad \Big\|\frac{u+v}{2}\Big\|_p^p \le 1 - \frac{\varepsilon\delta}{2^{p+1}} \\ &\Longleftrightarrow \quad \Big\|\frac{u+v}{2}\Big\|_p \le 1 - \tilde{\delta}(\delta, \varepsilon, p)\,.\end{aligned}$$

$L^p(\Omega)$ ist also gleichmäßig konvex und Satz 7.22 liefert, dass H reflexiv ist. ∎

8.6 Lemma. *Sei $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{\ge 0} : s \mapsto |s|^p$. Für alle $\varepsilon \in (0,1)$ gibt es ein $\delta > 0$, so dass für alle $a, b \in \mathbb{R}$ mit $|a-b| \ge \big(\frac{\varepsilon}{2^{p+1}}\big)^{\frac{1}{p}} \max(|a|, |b|)$ gilt:*

$$\varphi\Big(\frac{a+b}{2}\Big) \le \frac{1-\delta}{2}\big(\varphi(a) + \varphi(b)\big).$$

BEWEIS : Da φ achsensymmetrisch ist, reicht es den Fall $a \geq |b| \geq 0$ zu zeigen. Somit existiert ein $\tau \in [-1,1]$, so dass $b = \tau a$. Aufgrund der Voraussetzung folgt sogar $\tau \in [-1, 1-\big(\frac{\varepsilon}{2^{p+1}}\big)^{\frac{1}{p}}]$, denn für $\tau \geq 0$ gilt

$$(1-\tau)a = a - b \geq \Big(\frac{\varepsilon}{2^{p+1}}\Big)^{\frac{1}{p}} a \quad \Leftrightarrow \quad 1 - \Big(\frac{\varepsilon}{2^{p+1}}\Big)^{\frac{1}{p}} \geq \tau.$$

Für $\tau \in [-1, 1-\big(\frac{\varepsilon}{2^{p+1}}\big)^{\frac{1}{p}}]$ gilt:

$$\begin{aligned} \varphi\Big(\frac{a+b}{2}\Big) &= \frac{1}{2^p}(a+b)^p = \frac{1}{2^p}(1+\tau)^p a^p, \\ (1-\delta)\frac{1}{2}\big(\varphi(a)+\varphi(b)\big) &= \frac{1-\delta}{2}(a^p + a^p\,|\tau|^p) = \frac{1-\delta}{2}(1+|\tau|^p)a^p. \end{aligned}$$

Die behauptete Ungleichung gilt also genau dann, wenn

$$\frac{1}{2^{p-1}}\frac{(1+\tau)^p}{1+|\tau|^p} \leq 1-\delta \tag{8.7}$$

für alle $\tau \in [-1, 1-\big(\frac{\varepsilon}{2^{p+1}}\big)^{\frac{1}{p}}]$ gilt. Der Fall $\tau \in [-1,0]$ ist aufgrund von $\frac{1}{2^{p-1}}\frac{(1+\tau)^p}{1+|\tau|^p} \leq \frac{1}{2^{p-1}}$ klar und falls $\tau \in [0, 1-\big(\frac{\varepsilon}{2^{p+1}}\big)^{\frac{1}{p}}]$ betrachten wir die Hilfsfunktion $f(\tau) = \frac{1}{2^{p-1}}\frac{(1+\tau)^p}{1+\tau^p}$. Diese ist im Intervall $[0,1]$ streng monoton wachsend, denn es gilt

$$f'(\tau) = \frac{p(1+\tau)^{p-1}(1-\tau^{p-1})}{(1+\tau^p)^2} > 0$$

für alle $\tau \in [0,1)$. Wegen $f(1) = 1$ folgt (8.7) für alle $\tau \in [0, 1-\big(\frac{\varepsilon}{2^{p+1}}\big)^{\frac{1}{p}}]$. ■

Nun betrachten wir die Dualräume.

8.8 Satz (Riesz). *Sei $1 < p < \infty$ und sei $f \in (L^p(\Omega))^*$. Dann existiert genau eine Funktion $g \in L^{p'}(\Omega)$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$, so dass für alle $u \in L^p(\Omega)$ gilt:*

$$\langle f, u\rangle = \int\limits_\Omega g u\, dx. \tag{8.9}$$

Weiterhin gilt:

$$\|g\|_{p'} = \|f\|_{(L^p(\Omega))^*}\,. \tag{8.10}$$

Umgekehrt definiert jedes $g \in L^{p'}(\Omega)$ durch (8.9) ein stetiges lineares Funktional auf $L^p(\Omega)$.

Beweis : Wir definieren die Abbildung $T : L^{p'}(\Omega) \to (L^p(\Omega))^*$ durch:

$$\langle Tg, u\rangle := \int\limits_\Omega gu\,dx \qquad u \in L^p(\Omega),\ g \in L^{p'}(\Omega).$$

Offensichtlich ist T linear. Außerdem folgt mit der Hölder-Ungleichung

$$|\langle Tg, u\rangle| \le \|g\|_{p'}\|u\|_p,$$

d.h. $Tg \in (L^p(\Omega))^*$ und somit

$$\|Tg\|_{(L^p)^*} \le \|g\|_{p'}, \tag{8.11}$$

und die Rückrichtung ist bewiesen. Nun beweisen wir (8.10). Wähle dazu

$$u_0(x) = \begin{cases} |g(x)|^{p'-2}g(x) & \text{für } g(x) \neq 0, \\ 0 & \text{für } g(x) = 0. \end{cases}$$

Offensichtlich ist $u_0 \in L^p(\Omega)$, denn mit $p' = \frac{p}{p-1}$ und $p' - 1 = \frac{1}{p-1}$ gilt

$$\int\limits_\Omega |u_0|^p dx = \int\limits_{\{g\neq 0\}} |g|^{(p'-1)p}dx = \int\limits_\Omega |g|^{\frac{p}{p-1}}dx < \infty,$$

da $g \in L^{p'}(\Omega)$. Also ist $\|u_0\|_p^p = \|g\|_{p'}^{p'}$ und somit $\|u_0\|_p = \|g\|_{p'}^{\frac{1}{p-1}}$, d.h. u_0 ist also eine zulässige Testfunktion. Wenn wir diese einsetzen, ergibt sich

$$\langle Tg, u_0\rangle = \int\limits_\Omega g|g|^{p'-2}g\,dx = \int\limits_\Omega |g|^{p'} = \|g\|_{p'}^{p'}$$

und somit

$$\|g\|_{p'} = \frac{\langle Tg, u_0\rangle}{\|g\|_{p'}^{p'-1}} = \frac{\langle Tg, u_0\rangle}{\|u_0\|_p} \le \frac{\|Tg\|_{(L^p)^*}\,\|u_0\|_p}{\|u_0\|_p} = \|Tg\|_{(L^p)^*}\,.$$

Zusammen mit (8.11) haben wir die Isometrieeigenschaft (8.10) bewiesen. Es bleibt zu zeigen, dass T surjektiv ist. Sei $E := T(L^{p'}(\Omega)) = R(T)$, E ist also ein linearer Unterraum von $(L^p(\Omega))^*$. Da T eine lineare Isometrie ist, ist E abgeschlossen. In der Tat, sei (u_n) eine Folge in $L^p(\Omega)$, so dass $Tu_n \to v$ in $(L^p(\Omega))^*$ konvergiert. Dann ist

$$\|T(u_n - u_m)\|_{(L^p)^*} = \|u_n - u_m\|_p,$$

also ist auch (u_n) eine Cauchyfolge und konvergiert somit gegen ein u in $L^p(\Omega)$, d.h. $Tu_n \to Tu = v$.
Es reicht zu zeigen, dass E dicht in $(L^p(\Omega))^*$ ist. Dazu sei $\varphi \in (L^p(\Omega))^{**}$ so, dass

$$\langle \varphi, Tg \rangle_{(L^p)^{**},(L^p)^*} = 0 \qquad \forall\, g \in L^{p'}(\Omega),$$

d.h. $\varphi \in E^\perp \subseteq (L^p(\Omega))^{**}$, wobei wir $E^\perp$ bezüglich des Grundraums $X = (L^p(\Omega))^*$ betrachten. Da $L^p(\Omega)$ reflexiv ist, ist $J : L^p(\Omega) \to (L^p(\Omega))^{**}$ surjektiv. Also gibt es ein $h \in L^p(\Omega)$ mit $\varphi = Jh$ und somit

$$\langle \varphi, Tg \rangle = \langle Jh, Tg \rangle = \langle Tg, h \rangle,$$

d.h.

$$\int_\Omega gh\, dx = 0 \qquad \forall\, g \in L^{p'}(\Omega).$$

Nun wählen wir $g = |h|^{p-2}h$ und erhalten $\int |h|^p dx = 0$, woraus folgt $h = 0$ fast überall. Oder man folgert aus $C_0^\infty(\Omega)$ dicht in $L^{p'}(\Omega)$, dass nach dem Fundamentallemma der Variationsrechnung $h = 0$ ist. Dann ist auch $\varphi = 0$ und somit $E^\perp = \{0\}$. In den Übungen haben wir gezeigt, dass dann E dicht in $(L^p(\Omega))^*$ ist (vgl. Folgerung 2.7 in Kapitel 2).
Zur Eindeutigkeit: Seien $g_1,\, g_2 \in L^{p'}(\Omega)$ mit

$$\langle f, u \rangle = \int_\Omega g_1 u\, dx = \int_\Omega g_2 u\, dx.$$

Dann ist für alle $u \in L^p(\Omega)$: $0 = \int_\Omega (g_1 - g_2) u\, dx$ und mit den gleichen Argumenten wie oben folgt, dass $g_1 = g_2$ fast überall ist. ∎

• Wir haben gezeigt, dass für $1 < p < \infty$ die lineare, surjektive Isometrie aus (8.9) existiert. Wir können also die beiden Räume identifizieren:

$$(L^p(\Omega))^* \cong L^{p'}(\Omega).$$

Die Fälle $p = 1$ und $p = \infty$ sind schwieriger. Man kann zeigen:

8.12 Satz. *Sei $f \in (L^1(\Omega))^*$. Dann existiert genau eine Funktion $g \in L^\infty(\Omega)$ so, dass für alle $u \in L^1(\Omega)$ gilt:*

$$\langle f, u \rangle = \int_\Omega gu\, dx. \tag{8.13}$$

Weiterhin gilt:

$$\|g\|_\infty = \|f\|_{(L^1)^*}\,.$$

Umgekehrt definiert jedes $g \in L^\infty(\Omega)$ durch (8.13) ein stetiges, lineares Funktional auf $L^1(\Omega)$.

• Identifiziere $(L^1(\Omega))^* \cong L^\infty(\Omega)$ durch linearen, surjektiven Isomorphismus aus (8.13).

8.14 Folgerung. *$L^1(\Omega)$ ist nicht reflexiv.*

Beweis : OBdA sei $0 \in \Omega$. Betrachte $f_n = \alpha_n \chi_{B_{\frac{1}{n}}(0)}$, $\alpha_n = |B_{\frac{1}{n}}(0)|^{-1}$. Also gibt es ein n_0 derart, dass $B_{\frac{1}{n_0}}(0) \subseteq \Omega$, d.h. für alle $n \geq n_0$ gilt $\|f_n\|_{L^1(\Omega)} = 1$. Wenn $L^1(\Omega)$ reflexiv wäre, dann gäbe es mit Satz 7.17 eine Teilfolge, $(f_{n_k}) \subseteq (f_n)$, so dass

$$f_{n_k} \rightharpoonup f \quad \text{in } L^1(\Omega).$$

Da $(L^1(\Omega))^* \cong L^\infty(\Omega)$ heißt das für alle $g \in L^\infty(\Omega)$

$$\int_\Omega f_{n_k} g \, dx \to \int_\Omega f g \, dx. \tag{8.15}$$

Für $g \in C_0(\Omega \setminus \{0\})$ und k groß genug ist $\int\limits_\Omega g f_{n_k} dx = 0$. Daraus und aus (8.15) folgt:

$$\int\limits_\Omega f g \, dx = 0 \qquad \forall\, g \in C_0(\Omega \setminus \{0\}).$$

Dann liefert das Fundamentallemma der Variationsrechnung $f = 0$ fast überall in $\Omega \setminus \{0\}$, also $f = 0$ fast überall in Ω. Aber wenn man in (8.15) $g = 1$ setzt, folgt

$$1 = \int\limits_\Omega f_{n_k} \to \int\limits_\Omega f = 0,$$

ein Widerspruch. ∎

8.16 Folgerung. *$L^\infty(\Omega)$ ist nicht reflexiv.*

Beweis : Aus Satz 8.12 wissen wir, dass $L^\infty(\Omega) \cong (L^1(\Omega))^*$, aber in Satz 7.8 (iii) haben wir gezeigt, dass X reflexiv ist genau dann, wenn X^* reflexiv ist. Folgerung 8.14 besagt aber, dass $L^1(\Omega)$ nicht reflexiv ist. Also ist auch $L^\infty(\Omega)$ nicht reflexiv. ∎

• Dualraum von L^∞: Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $\mathcal{B}$ Menge der Lebesgue-messbaren Teilmengen von Ω.

8.17 Definition. *Eine Mengenfungtion $\varphi : \mathcal{B} \to \mathbb{R}$ heißt **additiv**, wenn für beliebige disjunkte Mengen $A, C \in \mathcal{B}$ gilt:*

$$\varphi(A \cup C) = \varphi(A) + \varphi(C).$$

Für $A \in \mathcal{B}$ wird mit

$$V_\varphi(A) := \sup_{C \subseteq A,\, C \in \mathcal{B}} |\varphi(C)| \tag{8.18}$$

die ***Variation*** *von φ auf A bezeichnet. Man sagt, dass φ von* ***beschränkter Variation*** *ist, wenn $V_\varphi(\Omega) < \infty$. φ heißt* ***absolutstetig*** *bezüglich des Lebesguemaßes, wenn aus $|B| = 0$ folgt, dass $\varphi(B) = 0$ ist.*

8.19 Satz. *Sei $f \in (L^\infty(\Omega))^*$. Dann existiert genau eine additive, absolutstetige Mengenfunktion φ mit beschränkter Variation so, dass*

$$\langle f, u\rangle = \int_\Omega u\, d\varphi \qquad \forall\, u \in L^\infty(\Omega). \tag{8.20}$$

Weiterhin gilt

$$\|f\|_{(L^\infty(\Omega))^*} = \|\varphi\|_{BV}. \tag{8.21}$$

Umgekehrt definiert jede solche Mengenfunktion durch (8.20) ein stetiges, lineares Funktional auf $L^\infty(\Omega)$.

Dabei ist das **Radonintegral** $\int_\Omega u\, d\varphi$ wie folgt zu verstehen. Für $u \in L^\infty(\Omega)$ sei $\ell_0, \ell_1 < \ldots < \ell_{N+1}$ eine Zerlegung des Bildbereiches von u, d.h. $-\|u\|_{L^\infty(\Omega)} > \ell_0$, $\|u\|_{L^\infty(\Omega)} < \ell_{N+1}$. Dann nennt man $\max_i |\ell_{i+1} - \ell_i| =: F(\ell)$ die Feinheit der Zerlegung. Definiert man nun

$$A_{i+1} := \{x \in \Omega \,\big|\, \ell_i \le u(x) < \ell_{i+1}\}$$

und wählt $\alpha_i \in [\ell_i, \ell_{i+1}]$ beliebig, so definiert

$$s_\ell := \sum_{i=0}^{N} \alpha_i \chi_{A_{i+1}}$$

eine Treppenfunktion, für die das Radonintegral definiert wird durch

$$\int_\Omega s_\ell d\varphi := \sum_{i=0}^{N} \alpha_i \varphi(A_{i+1}).$$

Man kann zeigen, dass

$$\lim_{F(\ell)\to 0} \sum_{i=0}^{N} \alpha_i \varphi(A_{i+1})$$

existiert und unabhängig von der Wahl der Zerlegung und der Wahl der α_i ist. Somit definiert man

$$\int_\Omega u\, d\varphi := \lim_{F(\ell)\to 0} \sum_{i=0}^{N} \alpha_i \varphi(A_{i+1}).$$

Weiterhin definiert man $\|\varphi\|_{BV} = \sup_{\|u\|_{L^\infty(\Omega)} \le 1} \int_\Omega u\, d\varphi$.

8.22 Beispiel.

Sei $g \in L^1(\Omega)$. Betrachte

$$\varphi(A) := \int\limits_A g\,dx = \int\limits_\Omega g\chi_A dx,$$

dann ist $\varphi : \mathcal{B} \to \mathbb{R}$ ist additiv, denn wenn $A \cap C = \emptyset$ ist, ist $\chi_{A\cup C} = \chi_A + \chi_C$. φ ist absolutstetig, denn wenn $|A| = 0$, d.h. $\chi_A = 0$, dann ist auch $\varphi(A) = 0$. Außerdem ist φ von beschränkter Variation, denn $V_\varphi(\Omega) = \sup\limits_{A\in\mathcal{B}} |\int\limits_A g\,dx| \leq \sup\limits_A \int\limits_\Omega |g|dx \leq \|g\|_1$, d.h. $L^1(\Omega) \subseteq BV$. Sei $u \in L^\infty(\Omega)$. Dann ist

$$\begin{aligned}\int\limits_\Omega u\,d\varphi &= \lim_{F(\ell)\to 0} \sum_i \alpha_i^\ell \varphi(A_{i+1}^\ell) \\ &= \lim_{F(\ell)\to 0} \sum \alpha_i^\ell \int\limits_{A_{i+1}^\ell} g\,dx \\ &= \lim_{F(\ell)\to 0} \int\limits_\Omega \sum_i \alpha_i^\ell \chi_{A_{i+1}^\ell} g\,dx \\ &= \int\limits_\Omega ug\,dx.\end{aligned}$$

• Beispiel 8.22 impliziert $L^1(\Omega) \subseteq (L^\infty(\Omega))^*$. Nicht alle $f \in (L^\infty(\Omega))^*$ sind durch L^1-Funktionen generiert. Sei $0 \in \Omega$ und sei

$$f_0 : C_0(\Omega) \to \mathbb{R} : \ u \mapsto u(0).$$

Dann ist $f_0 \in (C_0(\Omega))^*$ und $C_0(\Omega) \subseteq L^\infty(\Omega)$.[1] Nach dem Satz von Hahn-Banach gibt es eine Fortsetzung $f \in (L^\infty(\Omega))^*$ mit $f|_{C_0(\Omega)} = f_0$ und $\|f\|_{(L^\infty)^*} \leq 1$. Sei $g \in L^1(\Omega)$ mit

$$\langle f, u\rangle = \int\limits_\Omega ug\,dx \qquad \forall\, u \in L^\infty(\Omega).$$

Für $u \in C_0(\Omega \setminus \{0\}) \subseteq C_0(\Omega) \subseteq L^\infty(\Omega)$ gilt

$$\int\limits_\Omega ug\,dx = \langle f, u\rangle = u(0) = 0.$$

[1]Die Formulierung $C_0(\Omega) \subseteq L^\infty(\Omega)$ ist etwas unpräzise, genauer meint man den Unterraum X von $L^\infty(\Omega)$, so dass für alle Äquivalenzklassen $[h] \in X$ ein Repräsentant $h \in C_0(\Omega)$ existiert. Wie üblich wird auch hier auf die genaue Unterscheidung von Funktion und Äquivalenzklasse verzichtet.

Mit dem Fundamentallemma der Variationsrechnung ist dann $g = 0$ fast überall in $\Omega \setminus \{0\}$, also auch fast überall in Ω. Für $u_0 \in C_0(\Omega)$ mit $u_0(0) \neq 0$ folgt $u_0(0) = \langle f, u_0 \rangle = 0$, ein Widerspruch.

8.23 Satz. *Sei $1 \leq p < \infty$. Dann ist $L^p(\Omega)$ separabel.*

Beweis : Wir gehen wie in Kapitel 1 vor, wo wir gezeigt haben, dass $L^2(\Omega)$ separabel ist. ■

Man kann zeigen (siehe Alt, Lineare Funktionalanalysis oder Brezis, Functional Analysis):

8.24 Satz. *$L^\infty(\Omega)$ ist nicht separabel.*

Wir wollen kurz die Eigenschaften von $L^p(\Omega)$ zusammenfassen:

- $1 < p < \infty$: separabel, reflexiv $(L^p)^* \cong L^{p'}$, gleichmäßig konvex
- $p = 1$: separabel, $(L^1)^* \cong L^\infty$, nicht reflexiv
- $p = \infty$: nicht separabel, nicht reflexiv, $(L^\infty)^* \supsetneqq L^1$
- $1 < p < \infty$: Da L^p reflexiv ist, ist nach Satz 7.2

  $$B_{L^p} = \{f \in L^p \,\big|\, \|f\|_p \leq 1\}$$

  kompakt bezüglich der schwachen Topologie $\tau(L^p, L^{p'})$. Wenn (f_n) eine beschränkte Folge ist, gibt es nach Satz 7.17 eine Teilfolge $(f_{n_k}) \subseteq (f_n)$ mit

  $$f_{n_k} \rightharpoonup f \qquad \text{in } L^p.$$

- $p = \infty$: Aus Satz 6.10 und da $(L^1)^* \cong L^\infty$ folgt, dass

  $$B_{L^\infty} = \{f \in L^\infty \,\big|\, \|f\|_\infty \leq 1\}$$

  kompakt bzgl. der $*$-schwachen Topologie $\tau(L^\infty, L^1)$ ist. Wegen Folgerung 7.16 und Satz 8.23 gibt es für jede beschränkte Folge (f_n) in L^∞ eine Teilfolge $(f_{n_k}) \subseteq (f_n)$ mit

  $$f_{n_k} \overset{*}{\rightharpoonup} f \qquad \text{in } L^\infty.$$

Wir wollen nun diese Resultate auf Sobolevräume übertragen.

8.25 Definition. *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Menge und sei $u \in L^1_{loc}(\Omega)$. Eine Funktion $u_i \in L^1_{loc}(\Omega)$ heißt* **schwache Ableitung** *von u bezüglich der i-ten Variablen, wenn*

$$\int_\Omega u\, D_i\varphi\, dx = -\int_\Omega u_i\, \varphi\, dx \qquad \text{für alle } \varphi \in C_0^\infty(\Omega)$$

gilt. Die schwache Ableitung wird mit $D_i u$ oder auch $\partial_i u$ bezeichnet.

8.26 Definition. *Für $1 \le p \le \infty$ ist der Sobolevraum $W^{1,p}(\Omega)$ analog zu Definition 1.15 in Kapitel 2 durch*

$$W^{1,p}(\Omega) := \{u \in L^p(\Omega) \,|\, \text{schwache Ableitung } D_i u \in L^p(\Omega),\ i = 1, \ldots, n\}$$

definiert und mit der Norm $\|u\|_{1,p} := \big(\|u\|_p^p + \sum_{i=1}^n \|D_i u\|_p^p\big)^{\frac{1}{p}}$ versehen.

8.27 Satz. *Sei $1 < p < \infty$. Der Raum $W^{1,p}(\Omega)$ ist ein Banachraum, der separabel, reflexiv und gleichmäßig konvex ist.*

Beweis : Zuerst zeigen wir, dass $W^{1,p}(\Omega)$ ein Banachraum ist. Sei $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in $W^{1,p}(\Omega)$. Aus der Definition der Norm auf $W^{1,p}(\Omega)$ folgt dann, dass $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(D_i u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ für jedes $i = 1, \ldots, n$ Cauchyfolgen in $L^p(\Omega)$ sind. Da $L^p(\Omega)$ ein Banachraum ist, existieren Funktionen $u,\ g_i \in L^p(\Omega)$, so dass

$$\begin{aligned} u_n &\to u && \text{in } L^p(\Omega), \\ D_i u_n &\to g_i && \text{in } L^p(\Omega). \end{aligned}$$

Sei nun $\psi \in C_0^\infty(\Omega)$ beliebig. Da starke Konvergenz schwache Konvergenz impliziert, folgt

$$\int_\Omega u\, D_j\psi\, dx \leftarrow \int_\Omega u_n\, D_j\psi\, dx = -\int_\Omega \psi\, D_j u_n\, dx \to -\int_\Omega \psi\, g_j\, dx$$

und somit gilt $D_i u = g_i$ und $u \in W^{1,p}(\Omega)$.
Mit Hilfe der Isometrie $T : W^{1,p}(\Omega) \to \big(L^p(\Omega)\big)^{n+1} : u \mapsto (u, \nabla u)$ folgt, dass $W^{1,p}(\Omega)$ ein abgeschlossener Unterraum von $\big(L^p(\Omega)\big)^{n+1}$ versehen mit der Norm $\|f\| := \big(\sum_{i=1}^{n+1} \|f_i\|_p^p\big)^{\frac{1}{p}}$ ist. Offensichtlich ist das Produkt separabler Räume separabel. Aus Satz 6.11 und Satz 7.2 folgt sofort, dass das Produkt reflexiver Räume reflexiv ist. Dies und die Reflexivität und Separabilität von $L^p(\Omega)$ implizieren, dass $\big(L^p(\Omega)\big)^{n+1}$ reflexiv und separabel ist. Mit Lemma 7.8 und Satz 7.10 folgt somit, dass auch $W^{1,p}(\Omega)$ separabel und reflexiv ist. Analog zum Beweis von Satz 8.1 kann man zeigen, dass das Produkt gleichmäßig

konvexer Räume gleichmäßig konvex ist. Man ändert dazu die Menge A dort wie folgt:

$$A := \{j \in \{1, \ldots, n+1\} \bigm| \|u_j - v_j\|_p \geq \big(\frac{\varepsilon}{2^{p+1}}\big)^{\frac{1}{p}} \max(\|u_j\|_p, \|v_j\|_p)\},$$

und ersetzt die Integration durch Summation. Dies und Satz 8.1 liefern sofort, dass $W^{1,p}(\Omega)$ gleichmäßig konvex ist. ∎