Abteilung für
Angewandte Mathematik

Prof. Dr. M. Růžička
Dr. A. Gazca

17. April 2023

Funktionalanalysis

SoSe 2023 — Blatt 1

Abgabe: 24.4.2023.

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Sei (X, d) ein metrischer Raum. Zeigen Sie, dass für jedes $z \in X$ die Abbildung

$$\begin{aligned} d(\cdot, z) \; &: X \to \mathbb{R} \\ x &\mapsto d(x, z) \end{aligned}$$

stetig ist. Zeigen Sie, dass $d(\cdot, z)$ sogar Lipschitz stetig mit Konstante 1 ist, d.h für alle $x, y \in X$ gilt

$$|d(x, z) - d(y, z)| \leq d(x, y).$$

Aufgabe 2 (6 Punkte)

Seien X, Y normierte Vektorräume und $A\colon X \to Y$ eine lineare Abbildung. Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

(a) A ist stetig,

(b) A ist stetig in 0,

(c) $\sup_{\|x\|_X \leq 1} \|Ax\|_Y < \infty$,

(d) A ist beschränkt.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Überprüfen Sie, ob der Operator $T : X \to Y$ linear ist und ob er stetig und/oder beschränkt ist.

(a) $X = (C^1([0, 1]),\ \|\cdot\|_\infty)$, $Y = (C([0, 1]),\ \|\cdot\|_\infty)$, $Tf = f'$.

(b) $X = (L^1([0, 1]),\ \|\cdot\|_1)$, $Y = (\mathbb{R}, |\cdot|)$, $Tf = \sup\{c \geq 0 \,|\, c \leq |f| \text{ f.ü. auf } [0, 1]\}$.

Definition. Eine *algebraische Basis (Hamel-Basis)* eines Vektorraumes X ist eine linear unabhängige Menge $\mathcal{B} \subset X$, so dass jedes $x \in X$ als <u>endliche</u> Linearkombination von Elementen aus $\mathcal{B}$ darstellbar ist. Die *Dimension* von X ist die Anzahl der Elemente von $\mathcal{B}$.

Aufgabe 4 (6 Punkte)

Sei $(X, \|\cdot\|_X)$ ein normierter Vektorraum mit algebraischer Basis $\mathcal{B}$.

(a) Sei $\varphi \in L(X, \mathbb{R})$. Zeigen Sie, dass φ durch seine Werte auf $\mathcal{B}$ definiert ist, d.h. wenn $\varphi(x)$ für alle $x \in \mathcal{B}$ definiert ist, dann existiert genau ein lineares Funktional $\overline{\varphi} : X \to \mathbb{R}$ so, dass $\varphi(x) = \overline{\varphi}(x)$ für alle $x \in \mathcal{B}$ gilt.

(b) Zeigen Sie, dass ein unbeschränktes lineares Funktional $\varphi : X \to \mathbb{R}$ genau dann existiert, wenn $\dim X = \infty$ gilt.
Tipp: Betrachten Sie eine abzählbare Untermenge der Basis und definieren Sie ein geeignetes Funktional darauf.