Abteilung für
Angewandte Mathematik

Prof. Dr. M. Růžička
Dr. A. Gazca

26. Juni 2023

Funktionalanalysis

SoSe 2023 — Blatt 10

Abgabe: 3.7.2023.

Aufgabe 1 (2 Punkte)
Seien X, Y normierte Vektorräume und $x_0 \in X$, $x_0 \neq 0$ sowie $y_0 \in Y$. Zeigen Sie, dass es eine stetige, lineare Abbildung $T \in L(X, Y)$ gibt mit $Tx_0 = y_0$.

Aufgabe 2 (4 Punkte)
Sei V normierter Vektorraum und sei der Dualraum gleichmäßig konvex (siehe Definition auf Blatt 3). Sei weiter $u \in V$. Zeigen Sie, dass ein eindeutig bestimmtes $f \in V^*$ mit $\|f\|_{V^*} = \|u\|_V$ und $\langle f, u\rangle = \|u\|_V^2$ existiert.

Aufgabe 3 (6 Punkte)
Sei V ein Banachraum und $C \subset V$ konvex. Zeigen Sie

a) Das Innere $Int(C)$ von C ist konvex.

b) Der Abschluss $\overline{C}$ von C ist konvex.

c) Gilt $Int(C) \neq \emptyset$, so ist $\overline{Int(C)} = \overline{C}$.

Aufgabe 4 (4 Punkte)
Sei $C \subset \mathbb{R}^n$ konvex und nichtleer mit $Int(C) = \emptyset$. Zeigen Sie, dass C Teil einer affinen Hyperebene (im Sinne der linearen Algebra) ist, also

$$C \subset y_0 + span(e_1, \dots e_{n-1})$$

für ein $y_0 \in C$ und linear unabhängige Vektoren $e_1, \dots, e_{n-1} \in \mathbb{R}^n$ gilt.

Aufgabe 5 (4 Punkte)
Sei $C \subset \mathbb{R}^n$ konvex, nichtleer und sei $x_0 \in \mathbb{R}^n$ mit $x_0 \notin C$. Zeigen Sie, dass es ein lineares Funktional $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ und ein $\alpha \in \mathbb{R}$ gibt mit $\|f\| = 1$ und $f(x_0) \leq \alpha \leq f(x)$ für alle $x \in C$.
Tipp: Verwenden Sie Aufgabe 4.