Abteilung für
Angewandte Mathematik

Prof. Dr. M. Růžička
Dr. A. Gazca

3. Juli 2023

Funktionalanalysis

SoSe 2023 — Blatt 11

Abgabe: 10.7.2023.

Definition. Es sei $\omega \in L^1(0,1)$ eine Gewichtsfunktion. Eine Quadraturregel zur Approximation des Integrals:

$$\ell(f) := \int_0^1 f(x)\omega(x)\,\mathrm{d}x \qquad f \in C[0,1], \tag{1}$$

besteht aus einer Menge von $(n+1)$ Punkten $0 \le x_0^n < x_1^n < \ldots < x_n^n \le 1$, und $(n+1)$ Gewichten $\omega_j^n \in \mathbb{R}$, $0 \le j \le n$, für jedes $n \in \mathbb{N}$. Das Integral (1) wird dann mittels der Quadraturformel approximiert:

$$\ell_n(f) := \sum_{j=0}^n \omega_j^n f(x_j^n).$$

Zum Beispiel, wenn $x_j^n = \frac{j}{n}$, und die Lagrange-Interpolationspolynome $p_j^n \in \mathbb{P}(0,1)$ verwendet werden, erhält man die Newton–Cotes-Formel:

$$\ell_n(f) := \sum_{j=0}^n \left(\int_0^1 p_j^n(x)\omega(x)\,\mathrm{d}x \right) f(x_j^n).$$

Diese Quadraturregel integriert zum Höchstgrad n exakt.

Aufgabe 1 (Satz von Polya) (5 Punkte)

Es seien $\omega \in L^1(0,1)$ eine Gewichtsfunktion und $\ell_n \colon C[0,1] \to \mathbb{R}$ eine Folge linearer beschränkter Operatoren, gegeben durch

$$\ell_n(f) := \sum_{j=0}^n \omega_j^n f(x_j^n) \qquad \text{mit } \omega_j^n \in \mathbb{R} \text{ und } 0 \le x_0^n < x_1^n < \ldots < x_n^n \le 1,$$

mit der Eigenschaft:

$$\lim_{n\to\infty} \left| \int_0^1 p(x)\omega(x)\,\mathrm{d}x - \ell_n(p) \right| = 0 \qquad \forall\, p \in \mathbb{P}(0,1).$$

Zeigen Sie, dass

$$\lim_{n\to\infty} \left| \int_0^1 f(x)\omega(x)\,\mathrm{d}x - \ell_n(f) \right| = 0 \qquad \forall\, f \in C[0,1],$$

genau dann, wenn

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \left(\sum_{j=0}^n |\omega_j^n| \right) < \infty.$$

Tipp: Zeigen Sie, dass $\|\ell_n\|_{C[0,1]^*} = \sum_{j=0}^n |\omega_j^n|$; die Ungleichung $\le$ ist klar; zeigen Sie, dass es eine stetige stückweise lineare Funktion f_0 gibt, sodass $\|f_0\| = 1$ und $\ell_n(f_0) = \sum_{j=0}^n |\omega_j^n|$ gilt.

Aufgabe 2 (5 Punkte)

Sei X ein Banachraum und $f \in X^*$ mit $f \neq 0$. Wir betrachten die Hyperebene $E := \{f = 0\}$. Zeigen Sie

$$dist(x, E) := \inf_{x \in E} \|x - y\| = \frac{|\langle f, x\rangle|}{\|f\|}.$$

Tipp: Zeigen Sie zunächst $|\langle f, x\rangle| \leq \|f\|\, dist(x, E)$ und dann für festes $u \in X \setminus E$, dass $y_u(x) := x - \frac{\langle f,x\rangle}{\langle f,u\rangle} u \in E$ ist.

Aufgabe 3 (Satz von Baire) (5 Punkte)

Sei (X, d) ein nichtleerer, vollständiger, metrischer Raum und seien die Mengen $(A_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset X$ abgeschlossen. Für ein $x \in X$ und ein $\varepsilon > 0$ gelte

$$B_\varepsilon(x) \subset \bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k.$$

Zeigen Sie: Es existiert ein $k_0 \in \mathbb{N}$ mit $int(A_{k_0}) \neq \emptyset$.

Aufgabe 4 (5 Punkte)

Sei $|||\cdot|||$ eine Norm auf $C([0,1])$ mit den folgenden Eigenschaften:

a) $(C([0,1]), |||\cdot|||)$ ist vollständig.

b) Aus $\lim_{n\to\infty} |||f_n||| = 0$ folgt $\lim_{n\to\infty} f_n(t) = 0$ für alle $t \in [0,1]$.

Zeigen Sie, dass $|||\cdot|||$ äquivalent zur Standardnorm $\|\cdot\|_\infty$ von $C([0,1])$ ist.

Tipp: Wenden Sie den Satz vom abgeschlossen Graphen auf die Abbildung $\Lambda : (C([0,1]), |||\cdot|||) \to C([0,1], \|\cdot\|_\infty)$: $f \mapsto f$ an.