Abteilung für
Angewandte Mathematik

Prof. Dr. M. Růžička
Dr. A. Gazca

10. Juli 2023

Funktionalanalysis

SoSe 2023 — Blatt 12

Abgabe: 17.7.2023.

Aufgabe 1 (2 Punkte)
Sei X ein Banachraum. Zeigen Sie, dass wenn $f_n \to f$ stark in X und $x_n \rightharpoonup x$ schwach in X, dann gilt

$$\langle f_n, x_n \rangle \to \langle f, x \rangle.$$

Aufgabe 2 (5 Punkte)
Sei X ein reflexiver Banachraum. Zeigen Sie, dass $(X, \tau(X, X^*))$ Folgen-vollständig ist, d.h. jede $\tau(X, X^*)$-Cauchyfolge aus X hat einen schwachen Grenzwert in X. Eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ heißt $\tau(X, X^*)$-Cauchyfolge, falls es für jede $\tau(X, X^*)$-Nullumgebung U einen Index $N_U \in \mathbb{N}$ gibt, so dass $x_n - x_m \in U$ für alle $n, m \geq N_U$.

Aufgabe 3 (6 Punkte)
Sei X ein reflexiver Banachraum mit $dim\, X = \infty$. Zeigen Sie:

a) Jede offene, nichtleere Menge aus $(X, \tau(X, X^*))$ ist unbeschränkt.

b) $(X, \tau(X, X^*))$ ist nicht metrisierbar.

Tipp: Verwenden Sie den Satz von Baire. Sie dürfen Aufgabe 1 benutzen!

Aufgabe 4 (4 Punkte)
Sei X ein Banachraum und Y ein linearer Unterraum. Zeigen Sie: Y ist dicht in X genau dann, wenn $Y^\perp = \{0\}$.

Aufgabe 5 (3 Punkte)
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ messbar und $f \in L^p(\Omega) \cap L^q(\Omega)$ mit $p, q \in [1, \infty]$. Sei r zwischen p und q, dann gilt $\frac{1}{r} = \frac{1-\theta}{p} + \frac{\theta}{q}$ für ein $\theta \in [0, 1]$ (hierbei gilt die Konvention $\frac{1}{\infty} = 0$). Zeigen Sie, dass $f \in L^r(\Omega)$ und dass

$$\|f\|_{L^r(\Omega)} \leq \|f\|_{L^p(\Omega)}^{1-\theta} \|f\|_{L^q(\Omega)}^{\theta}$$

gilt.