Abteilung für
Angewandte Mathematik

Prof. Dr. M. Růžička
Dr. A. Gazca

24. April 2023

Funktionalanalysis

SoSe 2023 — Blatt 2

Abgabe: 1.5.2023.

Aufgabe 1 (3 Punkte)
Der Raum der stetigen Funktionen auf dem Interval $[0,1]$, $C^0([0,1])$, ist mit der Supremumsnorm

$$\|f\| := \sup_{x\in[0,1]} |f(x)|,$$

ein normierter Raum. Finden Sie in diesem Raum ein Gegenbeispiel zu dem aus dem $\mathbb{R}^n$ bekannten Satz von Bolzano–Weierstrass.

Aufgabe 2 (8 Punkte)
Seien $X = (X, \tau)$ und $Y = (Y, \sigma)$ topologische Räume und $f : X \to Y$. Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

(a) f ist stetig. (Definition mittels Umgebungen)

(b) Urbilder offener Mengen sind offen.

(c) Urbilder abgeschlossener Mengen sind abgeschlossen.

Sind X und Y zudem metrische Räume, so sind (a), (b) und (c) äquivalent zu

(d) f ist folgenstetig.

Aufgabe 3 (3 Punkte)
Seien X und Y Banachräume und sei X_0 ein dichter Untervektorraum von X. Dann ist X_0 versehen mit der Norm von X ein normierter Raum. Zeigen Sie: Jedes $A \in L(X_0, Y)$ lässt sich eindeutig zu einem $A \in L(X, Y)$ fortsetzen. Die Fortsetzung erfüllt $\|A\|_{L(X,Y)} = \|A\|_{L(X_0,Y)}$.

Aufgabe 4 (6 Punkte)
Sei $X := \{(x_j)_{j\in\mathbb{N}} \mid x_j \in \mathbb{R}\}$ der Raum aller Folgen in $\mathbb{R}$. Für $x, y \in X$ mit $x = (x_j)_{j\in\mathbb{N}}$ und $y = (y_j)_{j\in\mathbb{N}}$ definieren wir

$$d(x,y) := \sum_{j\in\mathbb{N}} 2^{-j} \frac{|x_j - y_j|}{1 + |x_j - y_j|}.$$

(a) Zeigen Sie, dass d eine Metrik auf X definiert.

(b) Sei $\{x^{(i)}\}_{i\in\mathbb{N}}$ eine Folge in X. Zeigen Sie, dass $d(x^{(i)}, 0) \to 0$ äquivalent ist zu $x_j^{(i)} \to 0$, für jedes $j \in \mathbb{N}$.

(c) Zeigen Sie, dass es keine norm $\|\cdot\|$ gibt, so dass es $c, C > 0$ gibt, so dass für alle $x \in X$ gilt, dass

$$c\|x\| \le d(x,0) \le C\|x\|.$$