Abteilung für
Angewandte Mathematik

Prof. Dr. M. Růžička
Dr. A. Gazca

1. Mai 2023

Funktionalanalysis

SoSe 2023 — Blatt 3

Abgabe: 8.5.2023.

Aufgabe 1 (6 Punkte)

Sei X ein Banachraum und sei $E \subset X$ ein abgeschlossener Untervektorraum. Dann ist X/E ein Vektorraum.

(a) Zeigen Sie, dass $\|\hat{x}\|_{X/E} := \inf_{y\in E} \|x - y\|_X$ eine Norm auf X/E definiert. Dies ist die *Quotientennorm.*

(b) Zeigen Sie, dass X/E (versehen mit der Quotientennorm) ein Banachraum ist.

Tipp: Sei $(\hat{x}_n)_n$ eine Cauchyfolge in X/E. Dann kann man wie folgt vorgehen:

(i) Wählen Sie eine Teilfolge $(\hat{x}_k)_k$ so, dass $\|\hat{x}_k - \hat{x}_j\|_{X/E} \le 2^{-k}$ für alle $j \ge k$ gilt;

(ii) Wählen Sie eine Folge $(e_k)_k$ in E so, dass $\|x_k - e_k - x_{k+1} + e_{k+1}\|_X \le \|\hat{x}_k - \hat{x}_{k+1}\|_{X/E} + 2^{-k}$ gilt;

(iii) $x_k - e_k \to x \in X$;

(iv) $\|\hat{x}_k - \hat{x}\|_{X/E} \to 0$.

Definition: Ein Banachraum X heißt *gleichmäßig konvex* genau dann, wenn für alle $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert so, dass für alle $x, y \in \overline{B_1(0)}$ mit $\|x - y\| > \varepsilon$ folgt $\|\frac{x+y}{2}\| < 1 - \delta$.

Aufgabe 2 (3 Punkte)

Sei H ein Hilbertraum. Zeigen Sie, dass H gleichmäßig konvex ist.

Aufgabe 3 (8 Punkte)

(a) Sei H ein Prä-Hilbert Raum über $\mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass die sogenannte Parallelogrammgleichung gilt:

$$\forall\, x, y \in H : \|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2).$$

(b) Sei $(X, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum über $\mathbb{R}$, für den die Parallelogrammgleichung gilt. Zeigen Sie, dass die Norm $\|\cdot\|$ von einem Skalarprodukt herrührt.

Tipp zum Teil (b): Definiere die Funktion

$$f(x, y) := \frac{1}{4}(\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2),$$

und zeigen Sie, dass f die Eigenschaften eines Skalarproduktes erfüllt. Beweisen Sie die Eigenschaft $f(\alpha x, y) = \alpha f(x, y)$ schrittweise: $\alpha \in \mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$.

Aufgabe 4 (3 Punkte)

Besitzt die Funktion

$$\operatorname{sign}\colon \mathbb{R} \to \{-1, 1\}, \quad \operatorname{sign}(x) := \begin{cases} -1 & \text{falls } x \le 0 \\ 1 & \text{falls } x > 0 \end{cases}$$

eine schwache Ableitung? Begründen Sie ihre Antwort!