Abteilung für Angewandte Mathematik

Prof. Dr. M. Růžička
Dr. A. Gazca

8. Mai 2023

Funktionalanalysis

SoSe 2023 — Blatt 4

Abgabe: 15.5.2023.

Aufgabe 1 (3 Punkte)
Seien H_1 und H_2 Hilberträume und sei $A\colon H_1 \to H_2$ linear und beschränkt. Zeigen Sie, dass $A^{**} = A$ und $|||A||| = |||A^*|||$ gilt.

Aufgabe 2 (4 Punkte)
Sei H ein Hilbertraum über $\mathbb{R}$ und sei $K \subset H$ konvex. Seien $x \in H$ und $y \in K$ beliebig. Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

(a) $\|x - y\| \le \|x - z\|$, für alle $z \in K$;

(b) $(x - y, z - y) \le 0$, für alle $z \in K$.

Aufgabe 3 (6 Punkte)
Definiere den Raum:

$$Y := \{g \in L^2(-\pi, \pi) \mid g(t - \pi) = g(t) \text{ für fast alle } t \in (0, \pi)\}.$$

(a) Zeigen Sie, dass Y ein abgeschlossener Teilraum von $L^2(-\pi, \pi)$ ist. Finden Sie $Y^\perp$.

(b) Sei $f \in L^2(-\pi, \pi)$ beliebig. Finden Sie die Elemente $g \in Y$ und $g^\perp \in Y^\perp$, für die $f = g + g^\perp$ gilt.

(c) Berechnen Sie
$$d := \inf_{g \in Y} \|h - g\|_{L^2(-\pi,\pi)},$$
für $h(t) = t$ und finden Sie das Element $g^* \in Y$, das $\|h - g^*\|_{L^2(-\pi,\pi)} = d$ erfüllt.

Tipp: Teil (b) ist ähnlich wie die Zerlegung einer Funktion in gerade und ungerade Komponenten.

Aufgabe 4 (7 Punkte)
Sei $\mathbb{D} \subset \mathbb{C}$ die Einheitskugel. Betrachten Sie den Bergman Raum:

$$A^2(\mathbb{D}) := \left\{ f \in L^2(\mathbb{D}) \mid f \text{ ist holomorph} \right\}.$$

Aus der Cauchyschen Integralformel folgt, dass:

$$r f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z + re^{i\theta}) r \, \mathrm{d}\theta \qquad f \in A^2(\mathbb{D}),\ 0 < s < 1,\ |z| < s.$$

(a) Indem sie die obige Gleichung für $0 < r < 1 - s$ integrieren, zeigen Sie dass
$$f(z) = \frac{1}{\pi(1 - s)^2} (f, \chi_{B_{1-s}(z)})_{L^2(\mathbb{D})},$$
wobei $\chi_{B_{1-s}(z)}$ die charakteristische Funktion des Balles $B_{1-s}(z)$ bezeichnet.

(b) Zeigen Sie:

$$|f(z)| \le \frac{\|f\|_{L^2(\mathbb{D})}}{\sqrt{\pi}(1-s)}$$

(c) Sei $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset A^2(\mathbb{D})$ eine Cauchyfolge. Zeigen Sie, dass f_n auf kompakten Teilmengen $K \subset \mathbb{D}$ gleichmäßig konvergent ist.

(d) Zeigen Sie, dass $A^2(\mathbb{D})$ eine abgeschlossene Teilmenge von $L^2(\mathbb{D})$ ist.

Tipp zum Teil (d): Verwenden sie den Weierstraßschen Konvergenzsatz: die Grenzfunktion einer lokal gleichmäßig konvergenten Folge holomorpher Funktionen ist wieder holomorph.