Abteilung für
Angewandte Mathematik

Prof. Dr. M. Růžička
Dr. A. Gazca

15. Mai 2023

Funktionalanalysis

SoSe 2023 — Blatt 5

Abgabe: 22.5.2023.

Aufgabe 1 (6 Punkte)
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet mit $\partial\Omega \in C^{0,1}$, $f \in L^2(\Omega)$ und $g \in H^{1,2}(\Omega)$. Zeigen Sie, dass

$$\begin{aligned} -\Delta u + u &= f \quad \text{in } \Omega, \\ u &= g \quad \text{auf } \partial\Omega, \end{aligned}$$

eine schwache Lösung $u \in H^{1,2}(\Omega)$ besitzt, d.h. u erfüllt

$$\sum_{i=1}^{n} \int_\Omega D_i u D_i v \,\mathrm{d}x + \int_\Omega uv \,\mathrm{d}x = \int_\Omega fv \,\mathrm{d}x \forall\, v \in H_0^{1,2}(\Omega),$$

und es gilt $R(u) = R(g)$, wobei R den Spuroperator bezeichnet.
Tipp: Lösen Sie zunächst die Gleichung mit Dirichlet Nullrandwerten zu einer geeigneten rechten Seite $\tilde{f}$.

Aufgabe 2 (4 Punkte)
Seien X,Y,Z Hilberträume und $A\colon X \to Y$, $B\colon Y \to Z$ linear und beschränkt. Beweisen Sie:

(a) $(BA)^* = A^*B^*$;

(b) Wenn A invertierbar ist und $A^{-1} \in L(Y, X)$, dann A^* ist auch invertierbar und $(A^*)^{-1} = (A^{-1})^*$;

(c) Angenommen, dass das Bild $A(X)$ abgeschlossen ist, zeigen Sie, dass $N(A^*A) = N(A)$ und $A^*A(X) = A^*(Y)$ gilt;

(d) Es sei $V \subset X$ ein abgeschlossener Unterrraum und $P\colon X \to V$ der entsprechende Projektionsoperator. Definiere die Inklusionsabbildung $\iota\colon V \to X$ durch $\iota(x) = x$. Zeigen Sie, dass

$$(\iota(v), x)_X = (v, Px)_V \qquad \forall\, v \in V, x \in X,$$

d.h. ι ist der adjungierte Operator zu P.

Aufgabe 3 (Methode der kleinsten Quadrate und Moore-Penrose-Inverse) (10 Punkte)
Seien X und Y Hilberträume. Sei $A\colon X \to Y$ linear und beschränkt mit abgeschlossenem Bild (in diesem Fall ist der Bildbereich $A^*(Y)$ auch abgeschlossen).

(a) Für ein beliebiges $b \in Y$ existiert nicht immer ein Element $x \in X$, sodass $Ax = b$. Zeigen Sie dennoch, dass das folgende Minimierungsproblem immer mindestens eine Lösung besitzt:

$$\|Ax - b\| = \inf_{z \in X} \|Az - b\|. \tag{2}$$

Zeigen Sie weiterhin, dass $x \in X$ eine Lösung des obigen Minimierungsproblems ist, genau dann wenn x Lösung der Normalengleichung $A^*Ax = A^*b$ ist.

(b) Zeigen Sie, dass ein eindeutiger Operator $A^\dagger \in L(Y;X)$ existiert ($A^\dagger$ heißt die Moore-Penrose-Inverse von A), so dass

$$AA^\dagger A = A, \qquad A^\dagger AA^\dagger = A^\dagger, \qquad (AA^\dagger)^* = AA^\dagger, \qquad (A^\dagger A)^* = A^\dagger A.$$

(c) Angenommen, dass A invertierbar ist, zeigen Sie, dass tatsächlich $A^\dagger = A^{-1}$ gilt. Aus diesem Grund heißt $A^\dagger$ auch eine *verallgemeinerte Inverse*.

(d) Zeigen Sie, dass es ein eindeutiges Element $x^\dagger \in X$ gibt, so dass

$$\|x^\dagger\| = \inf\{\|x\| \mid x \in X \text{ und } x \text{ ist eine Lösung von } (2)\}$$

und zwar $x^\dagger = A^\dagger b$; d.h. $x^\dagger$ ist die Lösung von (2) mit der kleinsten Norm.

Tipp zum Teil (b): Beweisen Sie, dass $A^\dagger = \iota\,((A^*A)|_V)^{-1}\,PA^*$ wohldefiniert ist und die gewünschten Eigenschaften hat, wobei $V = N(A)^\perp$ und $P\colon X \to V$ der Projektionsoperator ist, und ι die Inklusionsabbildung $\iota : V \to X$ bezeichnet. Sie dürfen die Tatsache benutzen, dass für bijektive $A \in L(X,Y)$, A^{-1} immer stetig ist.
Tipp zum Teil (d): Beweisen Sie, dass die allgemeine Lösung von (2) die Form $x^\dagger + (I - A^\dagger A)w$ hat (mit $w \in X$ beliebig), und dass $x^\dagger \in (I - A^\dagger A)(X)^\perp$.

Bemerkung: Das Minimierungsproblem von Teil (a) führt zu einem linearen Problem (die Normalengleichung), weil die Norm $\|\cdot\|$ von einem Skalarprodukt herrührt (aus demselben Grund ist der Projektionsoperator vom Projektionssatz auch linear).