Abteilung für
Angewandte Mathematik

Prof. Dr. M. Růžička
Dr. A. Gazca

22. Mai 2023

Funktionalanalysis

SoSe 2023 — Blatt 6

Abgabe: 5.6.2023.

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Es sei $\phi_0 \in L^2(\mathbb{R};\mathbb{C})$. Für eine gegebene messbare beschränkte Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, die aber $f \notin L^2(\mathbb{R};\mathbb{C})$, definiere den Operator $T\colon D(T) \subset L^2(\mathbb{R};\mathbb{C}) \to L^2(\mathbb{R};\mathbb{C})$:

$$D(T) := \left\{ \psi \in L^2(\mathbb{R};\mathbb{C}) \mid \int_{\mathbb{R}} |f(x)\psi(x)| \,\mathrm{d}x < \infty \right\},$$
$$T\psi := \overline{(f,\psi)}\phi_0 \qquad \text{für } \psi \in D(T).$$

Zeigen Sie, dass T wohldefiniert ist, finden Sie eine Formel für T^* und bestimmen Sie $D(T^*)$. Liegt $D(T^*)$ dicht in $L^2(\mathbb{R};\mathbb{C})$?

Aufgabe 2 (Ortsoperator aus der Quantenphysik) (4 Punkte)

Definiere den Ortsoperator $T\colon D(T) \subset L^2(\mathbb{R};\mathbb{C}) \to L^2(\mathbb{R};\mathbb{C})$:

$$D(T) := \left\{ \psi \in L^2(\mathbb{R};\mathbb{C}) \mid \int_{\mathbb{R}} x^2|\psi(x)|^2 \,\mathrm{d}x < \infty \right\},$$
$$T\psi(x) := x\psi(x) \qquad \text{für } \psi \in D(T).$$

Ist T beschränkt? Zeigen Sie, dass T selbsadjungiert ist.

Aufgabe 3 (Riesz-Fischer Satz) (4 Punkte)

Es sei $\{c_k\}_{k=-\infty}^{\infty} \subset \mathbb{C}$ eine Folge, sodass $\sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2 < \infty$. Zeigen Sie, dass eine Funktion $g \in L^2(-\pi,\pi;\mathbb{C})$ existiert, sodass $c_k = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(x)e^{-ikx}\,\mathrm{d}x$.

Aufgabe 4 (Fourierreihe in 2D) (4 Punkte)

Beweisen Sie, dass

$$(2L)^{-1}e^{i\frac{\pi}{L}k\cdot x},$$

wobei $k = (k_1,k_2) \in \mathbb{Z}^2$ ein Multiindex ist, und $x = (x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2$, ein vollständiges Orthonormalsystem in $L^2_{\text{per}}((-L,L)^2;\mathbb{C})$ ist.

Aufgabe 5 (4 Punkte)

(a) Seien $f,g \in C_{\text{per}}([-\pi,\pi])$. Angenommen, dass $f = g$ auf einem offenen Intervall $I := (-c,c) \subset (-\pi,\pi)$, zeigen Sie, dass die Fourierreihen von f und g im Punkt $x = 0$ entweder beide konvergieren oder divergieren.

(b) Seien $\{x_j\}_{j=1}^{N}$, N verschiedene Zahlen aus $(-\pi,\pi)$. Zeigen Sie, dass eine Funktion $\tilde{f} \in C_{\text{per}}([-\pi,\pi])$ existiert, deren Fourierreihe in den Punkten x_j für alle $j \in \{1,\dots,N\}$ divergiert.

Tipp zum Teil (a): Benutzen Sie Lemma 5.14.

Tipp zum Teil (b): Benutzen Sie die Tatsache, dass eine Funktion $\tilde{h} \in C_{\text{per}}([-\pi,\pi])$ existiert, deren Fourierreihe im Punkt $x = 0$ divergiert.