Abteilung für Angewandte Mathematik

Prof. Dr. M. Růžička
Dr. A. Gazca

5. Juni 2023

Funktionalanalysis

SoSe 2023 — Blatt 6

Abgabe: 12.6.2023.

Aufgabe 1 (7 Punkte)

(a) Sei $v \in L^2_{\text{per}}(-\pi, \pi)$ und $v_n(x) := v(nx)$ für $n \in \mathbb{N}$ und $x \in (-\pi, \pi)$. Zeigen Sie $v_n \rightharpoonup \frac{a_0}{2}$ in $L^2(-\pi, \pi)$ mit $a_0 := \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} v(x)\, dx$.

(b) Sei die Folge $u_n(x) := \sin^2(n\, x)$ für $n \in \mathbb{N}$ und $x \in (-\pi, \pi)$ gegeben. Dann ist $u_n \in L^2_{\text{per}}(-\pi, \pi) =: H$. Zeigen Sie, dass $u_n \rightharpoonup \frac{1}{2}$ in H gilt.

Tipp: Benutzen Sie die verallgemeinerte Fourierreihe um eine Darstellung von v (und somit v_n) zu erhalten. Beweisen Sie weiterhin, dass für messbare Menge $A \subset (-\pi, \pi)$, $|\int_{-\pi}^{\pi} (v_n - \frac{a_0}{2}) \chi_A \, \mathrm{d}x| \to 0$ (gleichmäßig in A) und benutzen Sie die Dichtheit der Treppenfunktionen in $L^2(-\pi, \pi)$.

Bemerkung: Da u_n als Teilmenge eines VONS schwach gegen 0 konvegiert, haben wir somit (bezüglich dem schwachen Limes) $(\lim_{n\to\infty} u_n)^2 = 0 \neq \frac{1}{2} = \lim_{n\to\infty} u_n^2$

Aufgabe 2 (5 Punkte)

Sei H ein Hilbertraum und $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}, (v_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset H$ mit $u_n \rightharpoonup u$ (schwach) und $v_n \to v$ (stark) in H.

a) Zeigen Sie die Konvergenz $(u_n, v_n) \to (u, v)$.

b) Beweisen Sie die Äquivalenz:

$$\lim_{n\to\infty} \|u_n - u\|^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} \|u_n\|^2 = \|u\|^2$$

c) Gelte $\limsup \|u_n\| \leq \|u\|$. Zeigen Sie, dass $u_n \to u$ (stark) in H gilt.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Seien H_1, H_2, H_3 Hilberträume und seien $A_1 \colon H_1 \to H_2$, $A_2 \colon H_2 \to H_3$ lineare Operatoren. Dann gilt:

(a) Ist A_1 stetig und A_2 kompakt, so ist $A_2 \circ A_1$ kompakt.

(b) Ist A_1 kompakt und A_2 stetig, so ist $A_2 \circ A_1$ kompakt.

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Sei $T \colon X \to Y$ ein linearer beschränkter Operator zwischen Hilberträume. Beweisen Sie:

(a) Wenn X endlichdimensional ist, dann ist T kompakt

(b) Wenn Y endlichdimensional ist, dann ist T kompakt