Abteilung für
Angewandte Mathematik

Prof. Dr. M. Růžička
Dr. A. Gazca

12. Juni 2023

Funktionalanalysis

SoSe 2023 — Blatt 8

Abgabe: 19.6.2023.

Definition. Sei H ein reeller Hilbertraum. Seien $S_1, S_2 \in L(H,H)$. Wir nennen S_1 *positiv*, falls $(S_1 u, u) \geq 0$ für alle $u \in H$ gilt und schreiben $S_1 \geq 0$. Wir schreiben $S_1 \geq S_2$ (bzw. $S_2 \leq S_1$), falls $S_1 - S_2 \geq 0$ gilt.

Aufgabe 1 (4 Punkte)
Sei H ein reeller Hilbertraum und $S \in L(H,H)$ selbstadjungiert mit $0 \leq S \leq I$. Zeigen Sie, dass $\|S^2\| = \|S\|^2 \leq 1$ sowie $0 \leq S^2 \leq S \leq I$ gilt.
Tipp: Verwenden Sie Lemma 8.20 (Normformel für selbstadjungierte Operatoren).

Aufgabe 2 ((Bonus) 5 Punkte)
Sei H ein reeller Hilbertraum und $(S_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset L(H,H)$ eine Folge selbstadjungierter Operatoren mit $S_{n+1} \leq S_n$, die gleichmäßig beschränkt ist (d.h. für ein $M > 0$ gilt für alle $n \in \mathbb{N}$: $\|S_n\| \leq M$). Zeigen Sie, dass ein selbstadjungierter Operator $S \in L(H,H)$ mit $\|S\| \leq M$ existiert, so dass

$$Sx = \lim_{n\to\infty} S_n x \qquad \forall x \in H.$$

Tipp: Betrachten Sie die reelle Folge $\big((S_n v, v)\big)_{n\in\mathbb{N}}$. Sie dürfen die Polarisationsformel $(S_n u, v) = \frac{1}{4}[(S_n(u+v), u+v) - (S_n(u-v), u-v)]$ verwenden (diese lässt sich elementar nachrechnen).

Aufgabe 3 (16 Punkte)
Sei H ein reeller Hilbertraum. Sei $T \in L(H,H)$ ein selbstadjungierter, positiver Operator mit $\|T\| \leq 1$. Wir definieren für $n \in \mathbb{N}$ die Operatoren $S_n \in L(H,H)$ induktiv durch

$$S_0 := I, \qquad S_{n+1} := S_n + \frac{1}{2}(T - S_n^2) \quad (n > 0).$$

a) Zeigen Sie $S_n^* = S_n$ für alle $n \geq 0$.

b) Zeigen Sie die Gleichung

$$I - S_{n+1} = \frac{1}{2}(I - S_n)^2 + \frac{1}{2}(I - T)$$

und schließen Sie mit Teil a), dass $I - S_n \geq 0$ für alle $n \geq 0$ gilt.

Bitte wenden...

c) Zeigen Sie $S_n \geq 0$ für alle $n \geq 0$.
Tipp: Beweisen Sie per Induktion und folgern Sie $S_n^2 \leq S_n$.

d) Zeigen Sie $\|S_n\| \leq 1$ für alle $n \geq 0$.

e) Zeigen Sie für alle $n \geq 1$ die Gleichung

$$S_n - S_{n+1} = \frac{1}{2}\Big[(I - S_n) + (I - S_{n-1})\Big](S_{n-1} - S_n)$$

und folgern Sie hieraus, dass sich $S_n - S_{n+1}$ für alle $n \geq 0$ als Polynom über der Variablen $I - T$ mit nicht negativen Koeffizienten darstellen lässt.
Tipp: Zeigen Sie induktiv, dass $(I - S_n)$ als Polynom über der Variablen $I - T$ mit nicht negativen Koeffizienten darstellbar ist. Folgern Sie mit der Gleichung induktiv die Aussage für $S_n - S_{n+1}$.

f) Folgern Sie aus Teil e) $S_n - S_{n+1} \geq 0$.
Tipp: Zeigen Sie, dass $I - T$ die Voraussetzungen von Aufgabe 1 erfüllt.

g) Folgern Sie die Existenz eines selbstadjungierten $S \in L(H, H)$ mit $\|S\| \leq 1$, $S \geq 0$ sowie $S^2 = T$.
Tipp: Zeigen Sie die Gleichung $S = S + \frac{1}{2}(T - S^2)$. Sie dürfen Aufgabe 2 verwenden!