Abteilung für
Angewandte Mathematik

Prof. Dr. M. Růžička
Dr. A. Gazca

19. Juni 2023

Funktionalanalysis

SoSe 2023 — Blatt 9

Abgabe: 26.6.2023.

Aufgabe 1 (4 Punkte)
Sei H ein Hilbertraum. Zeigen Sie, dass die Menge der linearen, beschränkten Operatoren mit stetiger Inverse offen in $L(H,H)$ ist.

Aufgabe 2 (6 Punkte)
Seien H ein Hilbertraum, $\{e_n\}_n \subset H$ ein vollständiges Orthonormalsystem, und $\{\lambda_n\}_n \subset \mathbb{R}$ eine beschränkte Folge. Zeigen Sie:

(a) Für beliebiges $x \in H$ konvergiert die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n (x, e_n) e_n$ in H.

(b) Die Abbildung $x \in H \mapsto Ax := \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n (x, e_n) e_n$ definiert einen linearen beschränkten selbstadjungierten Operator.

(c) λ_n ist ein Eigenwert von A, mit e_n der entsprechende Eigenvektor.

(d) A ist injektiv, falls $\lambda_n \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

(e) A ist kompakt, falls $\lambda_n \to 0$.

Aufgabe 3 (4 Punkte)
Sei H ein Hilbertraum und $A_n \in L(H,H)$ eine Folge von Operatoren, die in der Operatornorm gegen ein $A \in L(H,H)$ konvergieren. Sei weiter $\lambda_n \in \sigma(A_n)$ eine Folge, die gegen ein $\lambda \in \mathbb{C}$ konvergiert. Zeigen Sie $\lambda \in \sigma(A)$.

Aufgabe 4 (6 Punkte)
Sei $I = (0, 2\pi)$. Berechnen Sie die Eigenwerte der eindimensionalen Δ-Gleichung, d.h. die λ, für die eine schwache Lösung $u \neq 0 \in H_0^{1,2}(I)$ der Gleichung

$$\begin{aligned} -u'' &= \lambda\, u \qquad \text{in } I, \\ u(0) &= u(2\pi) = 0 \end{aligned}$$

existiert. Wie üblich ist die schwache Lösung durch die Gleichung

$$(u', \varphi')_{L^2(I)} = \lambda\, (u, \varphi)_{L^2(I)} \qquad \forall \varphi \in H_0^{1,2}(I)$$

definiert.
Tipp: Sie dürfen verwenden, dass das System $\{\pi^{-\frac{1}{2}} \sin(\frac{n}{2}x)\}_{n\in\mathbb{N}}$ ein vollständiges Orthonormalsystem in $L^2(I)$ und das System $\{\frac{2}{\sqrt{\pi} n} \sin(\frac{n}{2}x)\}_{n\in\mathbb{N}}$ ein vollständiges Orthonormalsystem in $H_0^{1,2}(I)$ (versehen mit dem Skalarprodukt $(u,v)_{H_0^{1,2}(I)} := (u', v')_{L^2(I)}$) ist. Vergleichen Sie die Fourierdarstellungen bzgl. der verschiedenen Orthonormalsysteme.